

LES NOUVEAUX
Précis
BRÉAL

Physique

Optique
MP-PC-PSI-PT

Cours

Méthodes

Exercices résolus

P. BRENDERS • M. SAUZEIX

Nouveau programme

 **Bréal**
L'ÉDITEUR DES PRÉPAS



LES NOUVEAUX
Précis
BRÉAL

Optique

MP - PC - PSI - PT

P. BRENDERS

Agrégé de Sciences Physiques
Professeur en classes préparatoires, Lyon

M. SAUZEIX

Agrégé de Sciences Physiques, Ingénieur ESEO
Professeur en BTS électrotechnique, Lyon

This One



PZR1-6WP-4TB2

1, rue de Rome - 93561 Rosny-sous-Bois cedex



Copyrighted material

LES NOUVEAUX Précis BRÉAL

Mathématiques 2^e année

- Algèbre et géométrie / MP / PC / PSI
- Analyse / MP / PC / PSI

Physique 2^e année

- Mécanique / MP - PC
- Mécanique des fluides / PC - PSI
- Électromagnétisme / MP / PC - PSI
- Physique des ondes / PC - PSI
- Électrotechnique / PSI
- Électronique / MP / PSI
- Optique / MP - PC - PSI - PT
- Thermodynamique / PC - PSI

Chimie 2^e année

- Chimie organique / PC
- Chimie / MP / PSI
- Thermodynamique-Matériaux / PC

Exercices 2^e année

- Mathématiques / MP / PC / PSI
- Physique / MP / PC / PSI / PT

Maquette et couverture : Sophie Martinet

Réalisation : Laser Graphie

Nous remercions la société DMS pour les figures 12, 13, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25 du chapitre 5 et la figure 8 du chapitre 7.

© Bréal 2005



Toute reproduction même partielle interdite.

Dépôt légal : janvier 2005

ISBN 2 7495 0395 7

Les **Nouveaux Précis Bréal** sont conçus pour apporter aux étudiants des classes préparatoires **une aide efficace dans leur travail**. Tout en conservant la rigueur des éditions précédentes, nous nous sommes efforcés d'aplanir au mieux toutes les difficultés inhérentes au discours scientifique. Nous savons par expérience que le rythme de la prépa n'autorise aucune perte de temps, et nous pensons qu'une explication claire et précise permet d'éviter au lecteur tout « blocage » inutile.

Strictement conforme au nouveau programme, cet ouvrage s'adresse à tous les étudiants de deuxième année. Chaque chapitre est divisé en trois parties complémentaires.

- Le **Cours**, qui présente les principaux raisonnements à comprendre et à connaître, accompagnés de nombreuses applications directes afin d'assimiler immédiatement les notions traitées.
- Les pages **Méthodes**, qui contiennent deux rubriques indispensables à la progression personnelle : *L'essentiel* permet de mémoriser rapidement tout ce qu'il faut retenir du chapitre, et la *Mise en œuvre* expose les grandes méthodes afin d'acquérir les bons « réflexes » en situation.
- Les **Exercices**, classés par niveaux de difficulté, dont les solutions détaillées sont enrichies d'astuces et de conseils (précédés des logos  ou ). La plupart des énoncés proposés ont été tirés de sujets de concours. Certains exercices sont accompagnés de courtes indications, comme en colle : il suffit parfois d'un petit « déclic » pour démarrer !

Il nous est apparu nécessaire d'accorder aux **Méthodes** et aux **Exercices** une place équivalente à celle du **Cours**. En effet, l'apprentissage ne peut pas être efficace sans combiner étroitement ces trois dimensions : comprendre, savoir faire et s'entraîner. En revanche, s'il organise intelligemment son travail, l'étudiant pourra s'améliorer dans toutes les disciplines en gérant au mieux son temps et ses efforts, principale condition de la réussite.

Ainsi, les étudiants disposeront, en optique, d'un outil de travail complet, adapté au rythme soutenu de cette seconde année de préparation aux concours.

Nous espérons que ce nouveau Précis les aidera à passer avec réussite leurs épreuves et nous répondrons volontiers à toute suggestion, remarque ou critique par e-mail à l'adresse infos@editions-breai.fr.

L'éditeur et les auteurs.

Sommaire

Chapitre 1 ■ Émission, propagation et réception de la lumière en tant qu'onde électromagnétique	5
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i>	24
<i>Exercices : énoncés, indications, solutions</i>	30
Chapitre 2 ■ Généralités sur les interférences lumineuses à deux ondes	41
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i>	55
<i>Exercices : énoncés, indications, solutions</i>	63
Chapitre 3 ■ Interférences non localisées à deux ondes : interféromètres à division de front d'onde. Cohérence spatiale	83
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i>	103
<i>Exercices : énoncés, indications, solutions</i>	108
Chapitre 4 ■ Interférences non localisées à deux ondes. Interféromètre de Michelson. Cohérence temporelle	131
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i>	152
<i>Exercices : énoncés, indications, solutions</i>	159
Chapitre 5 ■ Interférences localisées à deux ondes : interféromètre de Michelson	181
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i>	204
<i>Exercices : énoncés, indications, solutions</i>	208
Chapitre 6 ■ Diffraction à l'infini. Réseaux de diffraction	233
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i>	259
<i>Exercices : énoncés, indications, solutions</i>	265
Chapitre 7 ■ Polarisation de la lumière	285
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i>	303
<i>Exercices : énoncés, indications, solutions</i>	305
Index	318

Émission, propagation et réception de la lumière en tant qu'onde électromagnétique

Introduction

Les phénomènes d'interférences et de diffraction font appel aux superpositions d'ondes. Dans ce premier chapitre, nous abordons la lumière comme onde électromagnétique, puis nous nous intéressons à sa propagation depuis la source jusqu'au récepteur, en traversant le milieu. Nous introduisons aussi les notions de phase, de retard de phase, de chemin optique et plusieurs théorèmes ou propriétés concernant les ondes lumineuses.

Plan du chapitre 1

<u>A. La lumière: une onde de nature électromagnétique</u>	<u>6</u>
<u>B. Propagation de la lumière dans le vide</u>	<u>6</u>
<u>C. La lumière dans les milieux matériels</u>	<u>11</u>
<u>D. Aspect énergétique: éclairement, intensité lumineuse, sources de lumière</u>	<u>12</u>
<u>E. Les récepteurs de lumière ou photodétecteurs</u>	<u>18</u>
<u>F. Phase et retard de phase d'une onde lumineuse le long d'un même rayon – Notion de chemin optique</u>	<u>19</u>
<u>G. Expressions du chemin optique</u>	<u>22</u>
<u>H. Surfaces d'ondes</u>	<u>23</u>
<u>I. Théorème de Malus</u>	<u>23</u>
<u>Méthodes</u>	
<u>L'essentiel; mise en œuvre</u>	<u>24</u>
<u>Énoncés des exercices</u>	<u>30</u>
<u>Indications</u>	<u>31</u>
<u>Solutions des exercices</u>	<u>32</u>

1. Voir à ce sujet le cours d'optique de 1^{re} année.

2. Dans la suite, le terme de lumière désignera toujours la partie visible du spectre électromagnétique.

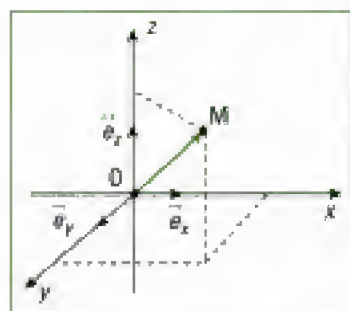


Fig. 1 – Rayon vecteur position $\vec{r} = \vec{OM}$ qui repère le point M où l'on exprime le champ.

3. Loin des sources, dans le vide, avec donc $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$, ces équations s'écrivent :

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ;$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} ; \text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{et } \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} .$$

4. Voir le cours d'électromagnétisme de deuxième année.

A. La lumière : une onde de nature électromagnétique

Le modèle de l'optique géométrique, ou modèle du rayon lumineux, vu en première année, rend compte de nombre d'observations et fonde toute l'étude des systèmes centrés composés de lentilles, de miroirs et de leurs associations (lunettes, télescopes...)¹.

Comme l'a découvert Grimaldi, la lumière² peut ne pas se propager en ligne droite dans un milieu transparent et homogène, les lois de la réflexion et de la réfraction étant incapables de rendre compte de cette propagation particulière nommée diffraction, qui signe le caractère ondulatoire de la lumière.

Définition 1

Une onde est un phénomène physique pouvant être décrit par une fonction scalaire ou vectorielle dépendant du temps et de l'espace.
Une onde est dite **progressive** si elle se propage sans se déformer.

Dans le modèle de Maxwell, la lumière est une onde de nature électromagnétique produite par une source ; cette onde, décrite par deux champs de vecteurs couplés, électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et magnétique $\vec{B}(\vec{r}, t)$ dépendants de l'espace (\vec{r}) (figure 1) et du temps (t), se propage dans le vide et dans les milieux matériels. Les grandeurs physiques $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et $\vec{B}(\vec{r}, t)$, appelées respectivement signal, ou vibration, électrique et magnétique, se propagent de proche en proche depuis la source.

B. Propagation de la lumière dans le vide

B.1. Équation de propagation

Dans le vide, loin des sources³ et en l'absence de charges et de courants, en utilisant les équations locales énoncées par Maxwell, les équations de propagation des champs s'écrivent comme des équations de D'Alembert vectorielles :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \text{ et } \Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

avec $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \equiv 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; μ_0 et ϵ_0 sont respectivement la perméabilité et la permittivité du vide⁴.

En coordonnées cartésiennes, les équations précédentes se découpent en équations de propagation scalaires de la forme :

$$\Delta s - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0,$$

s étant associé à l'onde en tant que signal, ou vibration scalaire qui caractérise l'onde et dépend de la position du point M dans l'espace. Cette vibration s'écrit sous la forme $s(M, t)$, dont une forme est $s(x, y, z, t)$ en coordonnées cartésiennes, où s appartient à l'ensemble des grandeurs physiques $\{E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z\}$.

Dans le cas des coordonnées cartésiennes, nous obtenons l'équation de propagation scalaire :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0.$$

B.2. L'onde plane

Définition 2

Une **onde plane** est une onde telle que l'on puisse choisir un repère spatio-temporel de type cartésien dans lequel le signal $s(M, t)$, associé à l'onde, ne dépend que d'une coordonnée d'espace et du temps.

1. Une onde plane n'est pas a priori une solution physiquement acceptable car son étendue spatiale est infinie. Ce type d'onde aura un intérêt si, dans les conditions de l'expérience, l'amplitude du signal varie peu dans des directions transversales à la direction de propagation, d'extension caractéristique raisonnable. Voir aussi la notion d'onde plane locale au paragraphe B.3.2.

2. Cette écriture n'est valable que pour une équation de D'Alembert à une dimension, en coordonnées cartésiennes.

3. L'onde est dite progressive car, pour deux points d'abscisses z_0 et z atteints aux dates t_0 et t avec $t > t_0$, nous avons :

$$f\left(t - \frac{z}{c}\right) = f\left(t_0 - \frac{z_0 + c(t - t_0)}{c}\right).$$

$$\text{Ainsi, } f\left(t - \frac{z}{c}\right) = f\left(t_0 - \frac{z_0}{c}\right) \text{ et}$$

$$\text{de même, } g\left(t + \frac{z}{c}\right) = g\left(t_0 + \frac{z_0}{c}\right),$$

soit $s(M) = s(M_0)$.

4. Monochromatique peut être remplacé par ses synonymes sinusoïdal ou harmonique. L'importance des signaux sinusoïdaux est liée au fait qu'ils constituent une base de décomposition des autres signaux (série et transformation de Fourier).

5. Cette écriture n'est valable que pour une équation de D'Alembert à une dimension, en coordonnées cartésiennes.

6. Nous notons a en minuscule car, comme nous le verrons, dans le cas des ondes, et à la différence de l'électrocinétique, l'amplitude n'est pas forcément une constante.

Dans le cas de la propagation d'une onde plane suivant l'axe Oz , le signal $s(x, y, z, t)$ aura alors pour expression $s = s(z, t)$ ¹.

• Les surfaces d'onde

Une surface d'onde est constituée de l'ensemble des points de l'espace atteints par l'onde tels que $s(M, t)$ soit uniforme, c'est-à-dire égal à une constante sur cette surface, à un instant donné.

L'intérêt de ces surfaces réside dans le fait qu'au cours du temps, elles se déplacent, rendant ainsi compte de la propagation de l'onde.

Dans le cas d'une onde plane se propageant selon Oz , les surfaces d'onde sont donc des plans d'équation $z = \text{cte}$, perpendiculaires à l'axe de propagation Oz . Ces plans sont d'extension infinie.

L'onde plane vérifie alors l'équation de propagation de D'Alembert à une dimension :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$$

dont la solution la plus générale s'écrit² :

$$s(z, t) = f\left(t - \frac{z}{c}\right) + g\left(t + \frac{z}{c}\right),$$

où $f\left(t - \frac{z}{c}\right)$ et $g\left(t + \frac{z}{c}\right)$ sont des ondes planes progressives³ se déplaçant

dans le sens des z respectivement croissants et décroissants, à la célérité c de la lumière dans le vide dans ce cas ($c = 299\,792\,458 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$).

• L'onde plane progressive monochromatique

La vibration associée à une onde plane progressive monochromatique⁴ qui se propage dans le sens des z croissants s'écrit, au point M d'abscisse z comme une solution particulière de la solution générale donnée sous la forme⁵ :

$$s(M, t) = a \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) - \varphi_s \right] = a \cos \left(\omega t - \omega \frac{z}{c} - \varphi_s \right)$$

ou encore :

$$s(M, t) = a \cos (\omega t - kz - \varphi_s).$$

Définition 3

Dans l'écriture d'une OPPM :

- $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ est la norme du vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{e}_z$, dirigé dans la direction de propagation de l'onde et dans son sens de propagation ;
- φ_s est un terme de retard de phase, constant, dû à la source ;
- ω est la pulsation ($\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$) ou fréquence angulaire de l'onde ;
- a , réel positif, est l'amplitude de la vibration⁶.

1. Habituellement on donne toujours les longueurs d'onde dans le vide, que nous noterons par la suite λ_0 . Dans un milieu matériel, nous noterons ces longueurs d'onde λ , en les indiquant si nécessaire (λ_{mat}).

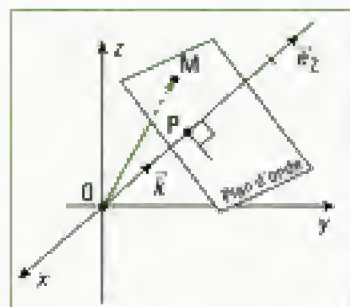


Fig. 2 – Propagation d'une onde plane dans une direction qui ne se confond pas avec une des directions du trièdre de référence.

2. Le vecteur d'onde \vec{k} donne la direction et le sens de propagation. L'écriture $\vec{k} \cdot \vec{r}$ permet de se libérer de la référence à un système de coordonnées particulier.

3. Le choix de l'écriture du retard de phase φ_M , précédé du signe moins dans la relation $s(\vec{r}, t) = a \cos(\omega t - \varphi_M)$, revient à considérer φ_M positif pour un retard de l'onde en M. Ce retard est habituel dans le cas d'un problème de propagation.

4. Remarquons que par rapport à la première définition de la surface d'onde au paragraphe B.2., nous perdons ici un renseignement sur l'amplitude de l'onde liée pourtant, comme nous le verrons, à son intensité. Nous confondrons cependant ces deux définitions tant que les dimensions transversales, caractéristiques de la situation de propagation, ont des échelles plus grandes que la longueur d'onde.

Propriété 1

L'onde plane progressive monochromatique est doublement périodique :

• périodique **dans le temps** puisque pour une valeur donnée de x ,

$$s(M, t) = a \cos(\omega t - kx - \varphi_s) = s(M, t + T)$$

où $T = \frac{2\pi}{\omega}$ est la période temporelle de l'onde ;

• périodique **dans l'espace** puisque pour une valeur donnée de t ,

$$s(M, t) = s(x, t) = a \cos(\omega t - kx - \varphi_s) = s(x + \lambda_0, t)$$

où $\lambda_0 = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} = cT$ est la période spatiale de l'onde, ou *longueur d'onde*¹.

• Propagation d'une onde plane dans une direction quelconque

Dans le cas où l'onde plane se propage dans une direction quelconque OP, qui ne se confond pas avec l'un des axes du trièdre de référence, le vecteur d'onde s'écrit alors (figure 2) :

$$\vec{k} = k\vec{e}_z$$

et la vibration :

$$s(P, t) = a \cos(\omega t - kZ - \varphi_s), \text{ avec } Z = \overline{OP} = \vec{r} \cdot \vec{e}_z.$$

Comment s'écrit la vibration en un point M d'un plan d'onde passant par P, si $\overline{OM} = \vec{r}$?

Nous avons déjà, $s(P, t) = a \cos(\omega t - kZ - \varphi_s) = s(M, t)$ puisque ces deux points appartiennent à un même plan d'onde.

De plus, $kZ = k\vec{e}_z \cdot \vec{r} = \vec{k} \cdot \vec{r}$ ². Donc :

$$s(M, t) = s(\vec{r}, t) = a \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi_s)$$

que l'on peut écrire aussi :

$$s(M, t) = s(\vec{r}, t) = a \cos(\phi_M)$$

avec $\phi_M(\vec{r}, t) = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi_s$ la phase de la vibration en M, ou bien :

$$s(M, t) = s(\vec{r}, t) = a \cos(\omega t - \varphi_M).$$

avec $\varphi_M(\vec{r}) = \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_s$ le retard de phase de l'onde en M³.

Nous avons donc aussi :

$$\phi_M(\vec{r}, t) = \omega t - \varphi_M(\vec{r}).$$

• La surface équiphase

Définition 4

Une **surface d'onde** est aussi une surface équiphase puisque sur cette surface, la phase de l'onde est constante à un instant donné⁴.

Dans le cas de l'onde plane, les surfaces d'onde correspondent à des points M tels que $\phi_M = \omega t - kZ - \varphi_s = \text{cte}$ à une date t donnée. Ce sont des plans.

Propriété 2

Les surfaces d'onde, ou surfaces équiphases, d'une onde plane qui se propage selon OZ, sont des plans d'abscisse Z constante.

1. Le cas de l'onde circulaire se ramène à celui de l'onde sphérique en limitant l'espace à deux dimensions.

2. En coordonnées sphériques, la fonction s_{sp} ne dépendant que de la seule variable radiale r , on a

$$\Delta s_{sp}(r, t) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rs_{sp})}{\partial r^2}.$$

3. Si la distance r tend vers zéro, la grandeur vibratoire associée à l'onde sphérique tend vers l'infini, ce qui est physiquement impossible. Nous voyons ici la limite de cette modélisation. L'onde sphérique, tout comme l'onde plane, est un modèle.



Fig. 3 – Notion d'onde localement plane : représentation de l'état de l'onde sphérique (circulaire dans un plan de coupe), à une date donnée. S est une source ponctuelle, Σ est une surface d'onde, π un plan localement tangent à la surface d'onde en M .

4. En un point M tel que $r \gg \lambda_{0s}$, c'est-à-dire très éloigné de la source, sur une période spatiale

λ_{0s} , l'amplitude passe de $\frac{A_0}{r}$ à $\frac{A_0}{r + \lambda_{0s}}$, soit une variation relative d'amplitude :

$$\frac{\Delta A(r)}{A(r)} \approx - \frac{\lambda_{0s}}{r},$$

à l'ordre 1, avec $A(r) = \frac{A_0}{r}$.

Si $r = 30$ cm et $\lambda_{0s} = 550$ mm, alors :

$$\frac{\Delta A(r)}{A(r)} = 2 \times 10^{-4} \%$$

qui est donc très petite.

B.3. L'onde sphérique

B.3.1 – Grandeur vibratoire associée à la propagation d'une onde sphérique¹

Définition 5

On appelle **onde sphérique** une onde se propageant dans un espace à trois dimensions et dont les surfaces d'onde sont des sphères.

En conséquence, à un instant donné, la grandeur vibratoire s_{sp} qui caractérise l'onde ne dépend que de la distance r à un point fixe O_s et s'écrit $s_{sp}(r, t)$.

L'équation de d'Alembert $\Delta s_{sp} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s_{sp}}{\partial t^2} = 0$ a pour solution générale :

$$rs_{sp} = f\left(t - \frac{r}{c}\right) + g\left(t + \frac{r}{c}\right).$$

On en déduit que² :

$$s_{sp} = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r} g\left(t + \frac{r}{c}\right).$$

Les surfaces d'onde sont des sphères de rayon $r = \text{cte}$: l'amplitude de s_{sp} varie en fonction de la distance r .

• Écriture de la grandeur vibratoire

Nous avons alors, pour une onde sphérique sinusoïdale :

$$s_{sp}(M, t) = s_{sp}(r, t) = A(r) \cos(\omega t - kr - \varphi_s) = \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - kr - \varphi_s);$$

A_0 étant une constante³.

B.3.2 – Approximation d'une onde sphérique sinusoïdale par une onde plane sinusoïdale

• Aspect qualitatif

Pour une onde sphérique sinusoïdale, comme le montre la **figure 3**, loin de la source S , c'est-à-dire pour $r \gg \lambda_{0s}$, les surfaces d'onde se confondent localement avec des plans d'onde (π). L'onde est dite localement plane ou quasi-plane. La quasi-planéité est liée à une limitation de la dimension transversale de l'onde.

• Aspect quantitatif

La variation relative de l'amplitude de l'onde sphérique, $\frac{A_0}{r}$, à grande distance de la source, est très faible et les variations d'amplitude de cette onde sont négligeables devant celles qu'impose la variation de phase⁴.

Propriété 3

Loin de la source, l'amplitude de l'onde sphérique reste **constante**.

Par contre, sur la distance d'une longueur d'onde, la phase varie de 2π et le cosinus prend toutes les valeurs comprises entre -1 et $+1$.

Propriété 4

Loin de la source, les variations d'amplitude sont donc négligeables devant celles imposées par la phase.

À grande distance de la source, nous pouvons donc considérer que l'amplitude de l'onde sphérique sinusoïdale est constante.

Ainsi, si $r \gg \lambda_0$ et si la variation de r reste faible, alors :

$$s_0(r, t) = A \cos(\omega t - kr - \varphi_s), \text{ avec } A \text{ une constante.}$$

B.4. Notation complexe associée à une onde

Tout comme dans le traitement des signaux électriques sinusoïdaux dépendant du temps, à la vibration réelle $s(\vec{r}, t) = a \cos(\Phi_M)$ en M , nous pouvons associer le nombre complexe¹ :

$$\underline{s}(\vec{r}, t) = a \exp(j\Phi_M), \text{ avec : } s(\vec{r}, t) = \Re\{\underline{s}(\vec{r}, t)\}.$$

En notation complexe, l'onde s'écrit donc aussi :

$$\underline{s}(\vec{r}, t) = a \exp[j(\omega t - \varphi_M)] = a \exp(-j\varphi_M) \exp(j\omega t) = \underline{A}(M) \exp(j\omega t)$$

en appelant $\underline{A}(M) = a \exp(-j\varphi_M)$ l'amplitude complexe de la vibration.

Dans le cas de l'onde plane $\varphi_M = \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_s$, donc :

$$\underline{s}(\vec{r}, t) = a \exp[j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi_s)] \quad \text{et} \quad \underline{A}(M) = a \exp[-j(\vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_s)].$$

1. L'écriture complexe

$\underline{s}(\vec{r}, t) = a \exp(-j\Phi_M)$ convient tout aussi bien puisque $A \cos(\Phi_M) = \Re\{a \exp(\pm j\Phi_M)\}$. Nous garderons le choix de $\underline{s}(\vec{r}, t) = a \exp(j\Phi_M)$ déjà retenu en électrocinétique.

Dans le cas où l'autre choix serait fait en début d'énoncé, il suffit de changer les signes dans les relations données ci-contre.

B.5. Structure et état de polarisation rectiligne d'une OPPM se propageant dans le vide

Propriété 5

On montre dans le cours d'électromagnétisme que, pour une onde électromagnétique plane monochromatique :

- \vec{E} et \vec{B} sont orthogonaux à la direction de propagation ;
- \vec{E} et \vec{B} sont orthogonaux entre eux ;
- le trièdre $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ est direct (figure 4) ;
- $\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E} = \frac{\vec{e}_z}{c} \wedge \vec{E}$ et donc : $\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$, soit $E = Bc$.

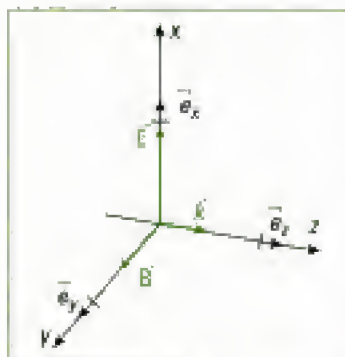


Fig. 4 – Trièdre $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$ associé à une onde plane.

L'onde électromagnétique plane progressive est donc une onde **transversale** puisque la grandeur vibratoire est perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde électromagnétique.

Définition 6

La **direction de polarisation** en un point M atteint par l'onde est celle du champ électrique en ce point. Si le champ électrique garde une *direction fixe* dans l'espace, la polarisation est dite *rectiligne* et le plan formé par \vec{E} et \vec{k} est le plan de polarisation de l'onde.

La structure dans l'espace d'une onde plane progressive monochromatique se déplaçant selon Oz , polarisée rectilignement selon Ox est donnée en figure 5 :

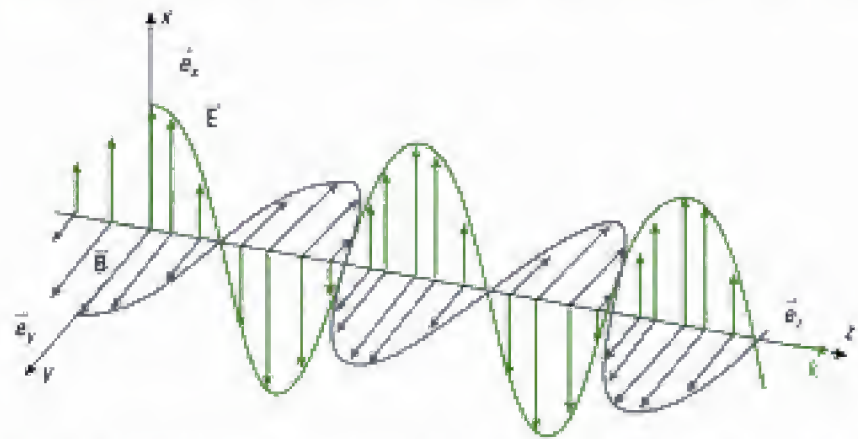


Fig. 5 – Représentation dans l'espace de la vibration des champs associée à une onde plane progressive sinusoïdale polarisée rectilignement selon Ox .

Même si l'existence physique des ondes planes progressives monochromatiques est impossible, puisque physiquement nous ne pouvons donner une extension spatiale infinie à un quelconque phénomène, elles ont une importance théorique certaine car, à l'image de l'utilité des signaux sinusoïdaux électriques dans la décomposition spectrale selon Fourier, les ondes planes jouent le même rôle vis-à-vis de toute solution, sous forme d'onde progressive plane, de l'équation linéaire de D'Alembert *via* la théorie de la transformation de Fourier¹.

Un cas simple est représenté par la description des ondes planes polarisées elliptiquement ou circulairement, dont nous pouvons donner une description sous formes d'ondes planes polarisées rectilignement, les vecteurs d'onde étant alors obligatoirement colinéaires.

C. La lumière dans les milieux matériels

C.1. La lumière dans le spectre électromagnétique

La lumière visible est composée d'ondes électromagnétiques dont la longueur d'onde appartient un domaine très limité du spectre : de 380 nm, pour le violet, à 780 nm pour le rouge² (figure 6).

L'ordre de grandeur des fréquences associées est 10^{14} Hz.

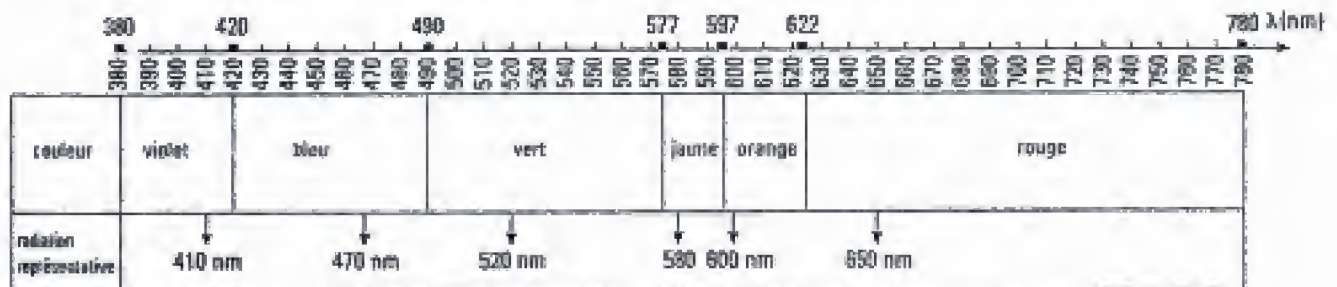


Fig. 6 – Longueurs d'onde des radiations lumineuses. Les longueurs d'onde sont toujours données dans le vide.

1. La transformée de Fourier permet de passer des ondes progressives aux ondes progressives sinusoïdales.

2. Les valeurs limites de ce domaine sont souvent arrondies à 400 nm et 800 nm.

C.2. Origine des effets optiques de la lumière

La compréhension de l'interaction entre la lumière et la matière nécessite des équations décrivant le champ – ce sont les équations de Maxwell – des équations décrivant le milieu, considéré comme un ensemble de charges, et des équations décrivant l'interaction entre le champ et le milieu.

Propriété 6

Le champ électrique \vec{E} , dans le vide ou dans la matière, est la cause de la plupart des effets optiques de la lumière, notamment sur les récepteurs¹.

1. Effet découvert par Becquerel (1850) confirmé par l'expérience de Wiener (1890).

2. En première année, nous avons postulé qu'un milieu est linéaire si la célérité est indépendante de la perturbation. Il est à noter qu'il a fallu l'invention des lasers pour qu'on puisse mettre en évidence des non linéarités optiques en imposant à la matière des champs électriques de valeur élevée. La définition ci-contre est bien sûr en accord avec celle de première année car, comme nous le verrons, l'intensité lumineuse est liée à l'amplitude du champ électrique associé à cette onde. On retrouve là l'hypothèse « des petits mouvements » vue dans la partie « ondes mécaniques ».

3. Pour l'étude des propriétés optiques des milieux matériels, notamment la dispersion, les valeurs d'indice, la classification des verres, nous renvoyons ici au cours d'optique de 1^{re} année.

4. Dans la pratique, nous prendrons $c \approx 3 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

C.3. Propriétés optiques des milieux matériels

Définition 7

- Un milieu est **linéaire** si ses propriétés sont indépendantes de l'intensité de l'onde lumineuse, et donc de l'amplitude du champ électrique².
- Un milieu est **homogène** s'il a les mêmes propriétés en tous ses points.
- Un milieu est **isotrope** si ses propriétés, autour d'un point du milieu, sont les mêmes dans toutes les directions.

Les milieux linéaires, homogènes et isotropes sont caractérisés par un indice n appelé *indice optique* de la substance ou encore *indice de réfraction*³.

Définition 8

On appelle **indice de réfraction** n d'un milieu le rapport de la célérité c d'une onde lumineuse monochromatique dans le vide à sa vitesse v dans le milieu considéré :

$$n = \frac{c}{v}, \text{ avec } c = 299\,792\,458 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \text{ }^4.$$

D. Aspect énergétique : éclairement, intensité lumineuse, sources de lumière

Au déplacement d'une onde électromagnétique est associé un transport d'énergie, comme pour toute onde, mais, à la différence des ondes mécaniques, comme lors de l'oscillation de l'eau au passage d'une vague, nos sens ne perçoivent pas directement les effets du passage de cette onde électromagnétique. Pourtant, la réception des ondes radio, la photosynthèse ou le chauffage radiant, manifestent indirectement ce transport d'énergie que l'on appelle aussi rayonnement.

D.1. Éclairement et intensité lumineuse

• Puissance rayonnée élémentaire instantanée

Le cours d'électromagnétisme de deuxième année montre que la puissance p rayonnée par une onde à travers une surface orientée est égale au flux du

vecteur de Poynting $\vec{\pi} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \wedge \vec{B})$ à travers cette surface S .

Nous avons donc :

$$dp = \vec{\pi} \cdot d\vec{s} \quad \text{et} \quad p = \iint_S \vec{\pi} \cdot d\vec{s}$$

où p est la puissance instantanée⁵.

5. $\vec{\pi}$, le vecteur de Poynting, dépend en effet du temps.

• Propagation de l'énergie – Notion de rayon lumineux

La direction du vecteur de Poynting est celle de la propagation de l'énergie. Nous admettons que c'est aussi la direction des rayons lumineux.

Ainsi, dans le cas d'une onde plane, les rayons sont normaux aux plans d'onde : nous associons donc à l'onde plane un faisceau de rayons parallèles¹.

Definition 9

Les rayons lumineux, ou rayons d'onde, sont les courbes perpendiculaires aux surfaces d'onde.

• Cas de l'onde plane ou localement plane

Supposons l'onde lumineuse harmonique (ou sinusoïdale) de structure localement plane, ce qui est souvent le cas, polarisée selon Ox et se propageant dans le vide. La différence avec la propagation dans un milieu matériel sera indiquée plus loin.

Si cette onde se déplace par exemple selon Oz , comme à la figure 5, alors il vient :

$$\vec{E} = E_m \cos(\omega t - kz - \phi_s) \vec{e}_x$$

ou encore $\vec{E} = E \vec{e}_x$ en posant $E = E_m \cos(\omega t - kz - \phi_s)$.

Or, $\vec{B} = \frac{\vec{e}_z}{c} \wedge \vec{E}$, donc :

$$\vec{\pi} = \frac{1}{\mu_0} \left[\vec{E} \wedge \left(\frac{\vec{e}_z}{c} \wedge \vec{E} \right) \right] = \frac{1}{\mu_0 c} E^2 \vec{e}_z = \epsilon_0 c E^2 \vec{e}_z.$$

La puissance élémentaire reçue par une surface élémentaire ds plane, perpendiculaire à \vec{e}_z , est ainsi :

$$dp = \vec{\pi} \cdot d\vec{s} = \epsilon_0 c E^2 ds.$$

La puissance rayonnée par l'onde plane ou localement plane au travers de la surface S s'écrit alors² :

$$P = \epsilon_0 c E^2 S.$$

• Éclairement

Cependant, nous ne mesurons jamais la puissance rayonnée instantanée car les récepteurs ont un temps de réponse très supérieur aux périodes des ondes du visible, qui sont de l'ordre de 10^{-14} s.

Propriété 7

Les détecteurs optiques ne sont donc sensibles qu'à la valeur moyenne temporelle de la puissance instantanée $\langle p \rangle_t$ ³.

Pour une onde plane polarisée rectilignement, la puissance moyenne P s'écrit :

$$P = \langle p \rangle_t = \langle \epsilon_0 c E^2 S \rangle_t.$$

Or, $\langle E^2 \rangle_t = \langle E^2(M, t) \rangle_t = E_m^2 \langle \cos^2(\omega t - kz - \phi_s) \rangle_t = \frac{E_m^2}{2}$

et donc

$$P = \langle p \rangle_t = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_m^2 S$$

où E_m est l'amplitude du vecteur champ électrique en M .

1. Voir aussi le cours d'optique de 1^{re} année.

2. Sans oublier que $E = E(z, t)$.

3. $\langle X \rangle_t$ est une notation qui désigne la moyenne temporelle de la grandeur physique X mesurée par un capteur. Ne pas oublier que le capteur possède ses propres caractéristiques concernant cette mesure (temps de réponse...).

Définition 10

L'éclairement (moyen) \mathcal{E} d'une surface ds est la puissance moyenne surfacique qu'elle reçoit :

$$\mathcal{E} = \frac{dP}{dS}$$

Dans le cas d'une onde plane harmonique polarisée rectilignement, cet éclairement s'écrit :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_m^2.$$

• **Intensité lumineuse**

La constante $\frac{1}{2} \epsilon_0 c$ est généralement omise car nous chercherons à exprimer le contraste entre des zones éclairées différemment, notion relative et non absolue comme l'est l'éclairement. Aussi, nous introduisons l'intensité de l'onde comme étant :

$$I = \frac{2}{\epsilon_0 c} \mathcal{E}.$$

Dans le cas de l'onde plane harmonique polarisée rectilignement, il vient :

$$I = \frac{2}{\epsilon_0 c} \mathcal{E} = E_m^2 = 2\langle \vec{E}^2 \rangle_t = 2\langle E^2 \rangle_t.$$

Application 1 Expression de l'intensité lumineuse en utilisant la notation complexe

Retrouver cette dernière relation pour une onde plane harmonique polarisée rectilignement selon Oz en utilisant la notation complexe.

Solution

Ainsi, $\vec{E} = E_m \exp j(\omega t - kz - \varphi_s) \vec{e}_z = \underline{E}_m \exp j(\omega t) \vec{e}_z$

avec \underline{E}_m l'amplitude complexe associée au vecteur champ électrique telle que :

$$\underline{E}_m = E_m \exp j(-kz - \varphi_s)$$

ou encore : $\vec{E} = \underline{E} \vec{e}_z$, avec $\underline{E} = \underline{E}_m \exp j[\omega t - kz - \varphi_s]$.

Nous obtenons alors : $I = \frac{2}{\epsilon_0 c} \mathcal{E} = E_m^2 = 2\langle \vec{E}^2 \rangle_t = 2\langle E^2 \rangle_t = \underline{E} \underline{E}^* = \underline{E}_m \underline{E}_m^*.$

1. Cette relation a été établie pour une onde plane polarisée rectilignement et n'est valable que dans cette hypothèse. Cependant, comme nous l'avons vu et comme nous le reverrons, l'onde plane, notamment locale, est une bonne approche des ondes lumineuses dans les situations que nous rencontrerons.

Nous retiendrons pour définition de l'intensité lumineuse la relation :

$$I = E_m^2 = 2\langle \vec{E}^2 \rangle_t = 2\langle E^2 \rangle_t = \underline{E} \underline{E}^* = \underline{E}_m \underline{E}_m^*.$$

D.2. Les sources de lumière

L'intérêt d'une approche de la nature des sources lumineuses et des récepteurs de lumière réside dans le fait que d'une part nous ne pouvons voir que la réalité de ce qui existe, les sources, et que d'autre part notre connaissance s'établit à l'aide de capteurs, qui nous rendent compte du signal lumineux émis par une ou plusieurs sources, mais ce de manière aussi imparfaite qu'ils le sont eux-mêmes.

Cependant, comme nous le verrons, des évolutions techniques très importantes ont eu lieu, et ont lieu, dans un domaine comme dans l'autre.

1. On doit cette réalisation à Théodore Maiman à la suite des travaux de Charles Townes sur les Maser (effet équivalent à l'effet laser mais dans le domaine des micro-ondes), en utilisant les travaux d'Alfred Kastler sur le pompage optique.

2. Le vocabulaire lié aux sources et aux récepteurs est supposé connu.

3. La température de la source est associée, par référence à l'émission du corps noir, à une longueur d'onde λ_m correspondant au maximum d'émission de ce corps dans la bande spectrale selon la loi de Wien : $\lambda_m T = 2,8978 \times 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{K}$. Pour le Soleil, $T = 5\,800 \text{ K}$, donc $\lambda_m \approx 500 \text{ nm}$ (vert-bleu) et pour la lampe au tungstène ($T = 2\,800 \text{ K}$), $\lambda_m = 1\,000 \text{ nm}$, donc une émission lumineuse décalée vers le rouge dans ce cas.

L'avènement de la source Laser, mise au point en 1960¹, est à ce titre déterminante dans l'histoire de l'optique.

D.2.1 – Cas des sources lumineuses² qui relèvent de l'émission spontanée (dites « sources classiques »)

Le Soleil serait la meilleure source possible, mais peu facile d'emploi.

Les sources utilisées au laboratoire comprennent :

- les lampes à filament de tungstène de l'éclairage domestique classique, de température de filament de l'ordre de 2800 K ³ ;
- les lampes quartz-iode dans lesquelles une ampoule en quartz contient du gaz iode qui, par un cycle de composition-décomposition de l'iodure de tungstène, régénère le filament, ce qui permet d'élever sa température ($3\,100 \text{ K}$ ou $\lambda_m = 900 \text{ nm}$) ;
- les lampes dites spectrales qui utilisent la décharge électrique produite entre deux électrodes dans un gaz (hélium...) ou une vapeur métallique (mercure, cadmium, sodium).

L'observation des spectres d'émission des sources à l'aide d'un spectroscopie, à prisme ou à réseau, a permis de mettre en évidence des spectres discontinus dits spectres de raies d'émission, comme dans le cas de l'élément sodium ou de l'élément mercure (figure 7).



Fig. 7 – Spectre de raies d'émission de l'élément mercure.

4. Niels Bohr (1885 – 1962), prix Nobel de Physique en 1922. Travaux de première importance en physique atomique et nucléaire, notamment en mécanique quantique.



Fig. 8 – État fondamental et état excité d'un atome.

5. Classiquement, on attribue abusivement cette énergie aux seuls électrons de l'atome.

6. Cette durée dépend de la transition.

7. Il existe aussi des échanges thermiques, selon le matériau considéré.

Niels Bohr⁴ a interprété ce résultat en disant que l'énergie d'un atome ne peut prendre que certaines valeurs formant une suite discontinue de niveaux d'énergie ; les variations d'énergie de l'atome lors d'une émission (ou d'une absorption) ne peuvent se faire que par saut : elles sont quantifiées. Le passage d'un état d'énergie à un autre, par saut quantique, est appelé **transition**.

D.2.1.1 – L'émission lumineuse

S'il n'est pas perturbé, l'atome reste naturellement dans son état fondamental stable qui correspond à son énergie la plus basse, par exemple le niveau E_{n1} (figure 8).

Sous l'effet d'un apport d'énergie cinétique, comme un choc avec un autre atome ou un électron, ou sous l'action d'une lumière, qui se traduit par l'absorption de photons, l'atome est porté dans un de ses niveaux d'énergie supérieure, par exemple E_{n2} ⁵ : nous disons qu'il est dans un état excité, état instable de durée limitée.

L'état d'excitation a une courte vie : après une durée moyenne τ de l'ordre de $\tau = 10^{-8} \text{ s}$ environ⁶, appelée durée d'excitation, l'atome excité revient à un état de plus basse énergie, qui peut être l'état fondamental ou non, en perdant de l'énergie dans cette transition (figure 8). Cette désexcitation s'accompagne de l'émission d'une onde électromagnétique, et pour nous de lumière, en ne s'intéressant qu'au seul vecteur champ électrique⁷.

Dans ce cas, l'énergie du photon émis est :

$$h\nu_0 = E_{n_2} - E_{n_1},$$

avec $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}^{-1}$ la constante de Planck.

Toutes les radiations émises n'ont pas la même intensité lumineuse.

D.2.1.2 – Notion de train (ou paquet) d'ondes

Dans une approche semi-classique, en refusant l'instantanéité de la transition, nous pouvons imaginer que cette transition est associée à un processus d'oscillations de durée τ nommé train d'ondes¹.

Définition 11

Dans l'approche semi-classique, la lumière est émise sous la forme d'un phénomène oscillatoire électromagnétique de courte durée appelé **train d'ondes électromagnétiques** de fréquence :

$$\nu_0 = \frac{E_{n_2} - E_{n_1}}{h},$$

dont la durée moyenne est égale à la durée d'excitation τ ².

1. Le modèle des trains d'ondes, dit modèle classique, qui n'est pas la réalité, est celui de l'atome classique dans lequel l'électron est considéré élastiquement lié au noyau (électron de Lorentz). La source de l'onde électromagnétique est alors le dipôle électrique oscillant (rayonnant), dont nous considérerons toujours les effets à grande distance de la source. Dans ce modèle, si l'atome rayonne, les oscillations s'amortissent.

2. En fait, la relation d'incertitude de Heisenberg $\Delta E_e \times \Delta t \geq \hbar$ montre bien que si E_e était parfaitement définie, alors Δt tendrait vers l'infini, ce qui est impossible. On peut donc associer une durée τ finie à la transition d'énergie E_e . ΔE_e est l'incertitude sur l'énergie et Δt la durée associée à l'existence de cette énergie, avec $\hbar = \frac{h}{2\pi}$. Le signe \geq de la relation d'incertitude signifie « au moins de l'ordre de grandeur de \hbar ».



Fig. 10 – Modèle de paquet d'ondes amorti.

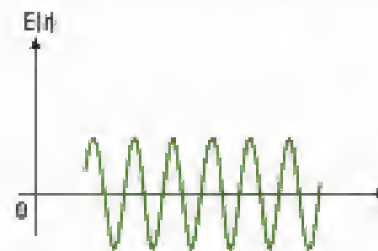


Fig. 9 – Modèle de train d'ondes en forme de sinusoïde tronquée (dans le temps).

L'atome désexcité subit, à une date non prévisible, une nouvelle excitation et émet un nouveau train d'ondes. La phase de l'oscillation, relevant elle aussi d'un processus aléatoire, varie à chaque train d'ondes.

Une source réelle classique est constituée d'un grand nombre de sources monoatomiques, toutes soumises au caractère aléatoire de l'émission lumineuse.

Dans la suite du cours, nous adoptons pour la forme du train d'ondes le modèle simplifié dit « de la sinusoïde tronquée » (figure 9), c'est-à-dire un modèle plus simple que celui du modèle dit « oscillatoire amorti » (figure 10).

La représentation spatiale, à une date t donnée, d'une onde qui se propage selon Ox depuis une source S , et dont la direction de polarisation se confond avec la direction verticale de la feuille, est ainsi (figure 11) :

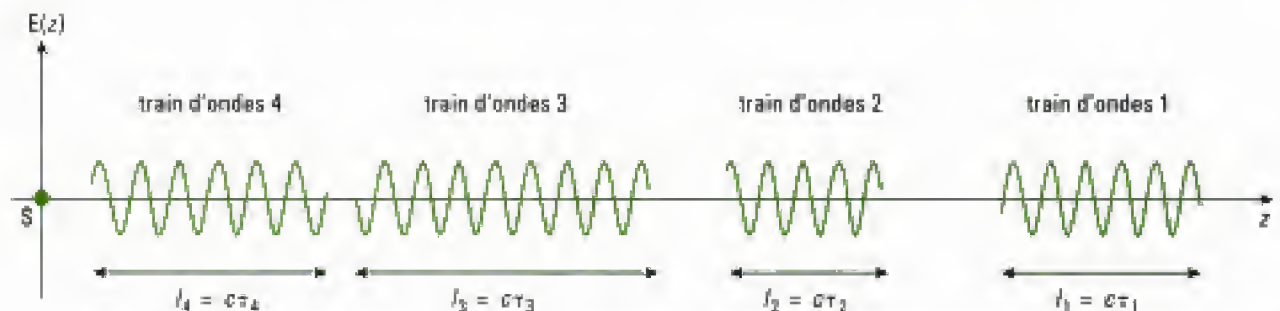


Fig. 11 – Aspect de la propagation des trains d'ondes dans l'espace. La date émission, la phase à l'origine et la durée de chaque train d'ondes sont aléatoires.

1. La notion de durée étant attachée obligatoirement au temps, nous omettons par la suite le qualificatif « temporel », lorsqu'il n'y a pas de confusion possible.

2. Nous raisonnons ici dans le vide. Dans le cas d'un milieu matériel où la vitesse est v , on aurait bien évidemment $L_c = v \tau_c$.

3. L'importance physique de la phase à l'origine dans la notion de cohérence temporelle est souvent occultée par la relation liée à l'espace $L_c = c \tau_c$ qui en découle.



Fig. 12 – Densité spectrale pour une distribution lorentzienne, en pointillés gris, et une distribution gaussienne, en vert, de même hauteur I_0 et de même largeur à mi-hauteur. Le modèle d'une distribution lorentzienne est adapté au cas des lampes haute pression et celui de la distribution gaussienne au cas des lampes basse pression.

4. $\Delta \nu_0$ est donc l'équivalent d'une bande passante.

5. On peut établir cette expression en utilisant la relation d'incertitude de Heisenberg $\Delta E_{e0} \times \tau_e = \hbar$ et la relation de Bohr $\hbar \nu = E_{e2} - E_{e1}$.

6. En effet, comme $\nu = \frac{c}{\lambda_0}$, alors $d\nu = -c \frac{d\lambda_0}{\lambda_0^2}$.

7. Voir cours d'électromagnétisme pour ce qui concerne l'effet Doppler. Si la durée τ entre deux chocs est inférieure à τ_c , alors $\Delta \nu_0 \tau = 1$.

D.2.1.3 – Durée de cohérence temporelle et longueur de cohérence temporelle de l'onde¹

Définition 12

La **durée de cohérence** τ_c d'une onde de fréquence ν_0 émise par une source est la valeur moyenne de la durée des trains d'ondes.

Définition 13

La **longueur de cohérence** L_c de l'onde, ou de la source, est la longueur parcourue par l'onde pendant la durée de cohérence :

$$L_c = c \tau_c \text{.}$$

Propriété 8

Chaque train d'ondes de durée de cohérence τ_c , et de longueur de cohérence L_c , a une phase à l'origine ϕ_s aléatoire au cours du temps.

D'un point de vue physique, c'est l'évolution de la phase à l'origine qui va déterminer la cohérence temporelle de l'onde³. Ainsi :

- en un point de l'espace atteint par l'onde, l'onde est cohérente tant que la phase est parfaitement définie, c'est-à-dire tant que ϕ_s est parfaitement définie, ce qui est le cas pendant la durée de cohérence τ_c ;
- à une date donnée, l'onde est cohérente sur une distance égale à la longueur de cohérence puisque sur cette distance $\phi_s = \text{cte}$.

D.2.1.4 – Équivalence entre longueur de cohérence temporelle et largeur spectrale de l'onde

Il est d'usage de représenter les distributions spectrales en énergie autour de la valeur la plus probable ν_0 (figure 12) et de leur donner une largeur spectrale à mi-hauteur égale à $\Delta \nu_0$ ⁴, s'étendant entre $\nu_0 - \frac{\Delta \nu_0}{2}$ et $\nu_0 + \frac{\Delta \nu_0}{2}$. Le

lien entre la largeur spectrale et la durée de cohérence s'écrit⁵ :

$$\Delta \nu_0 \tau_c = 1.$$

Propriété 9

À la durée de cohérence τ_c est donc invariablement liée une largeur spectrale $\Delta \nu_0$ de la source par la relation :

$$\Delta \nu_0 \tau_c = 1.$$

- Une onde dite « monochromatique » de fréquence ν_0 correspond à une onde qui serait illimitée dans le temps ;
- la largeur spectrale $\Delta \nu_0$ rend compte de la limitation du train d'ondes dans le temps ;
- la cohérence temporelle de l'onde, ou de la source, augmente si la longueur de cohérence augmente ou si la largeur spectrale diminue.

La longueur de cohérence s'écrit :

$$L_c = c \tau_c = \frac{c}{\Delta \nu_0} = \frac{\lambda_0^2}{\Delta \lambda_0} \text{.}$$

L'effet Doppler et l'effet des collisions (surtout dans les gaz) augmentent la largeur spectrale des sources⁷.

D.2.2. Cas des sources qui relèvent de l'émission stimulée

Ce cas recouvre surtout celui des lasers qui, comme leur acronyme l'indique (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiations), utilisent l'émission stimulée plutôt que l'émission spontanée.

Nous avons vu le processus d'émission spontanée où l'onde lumineuse est émise dans toutes les directions par train d'ondes qui n'ont entre eux aucune relation de phase (lumière incohérente). Il existe cependant un autre mode de désexcitation, celui de l'émission stimulée, prévue par Einstein en 1917.

D.2.2.1 – L'émission stimulée

Dans ce cas, si l'atome se trouve dans un état excité E_{n_2} comme vu précédemment, un photon incident, d'énergie $h\nu_0 = E_{n_2} - E_{n_1}$, peut forcer l'atome à passer de l'état d'énergie E_{n_2} à l'état E_{n_1} avec émission d'un photon de même énergie¹. Dans le cas des lasers, on réalise d'abord une inversion de population des niveaux (E_{n_2} est alors plus peuplé que E_{n_1}) : l'émission stimulée provoque alors un effet d'amplification de l'émission lumineuse.

Dans le laser, cette lumière émise par effet stimulé a des propriétés remarquables puisque les photons, et donc aussi l'onde électromagnétique émise, ont² même direction, même fréquence, même phase, même polarisation.

En conséquence, les photons sont indiscernables et **la lumière émise est cohérente**. Les principales qualités d'un laser, par rapport aux sources classiques, sont la directivité, la durée d'émission, la finesse spectrale et la cohérence temporelle. Avec ces propriétés, le faisceau laser est de première importance en optique. Il permet non seulement d'approcher la notion de rayon lumineux, mais aussi celle d'onde plane.

D.2.2.2 – Propriétés de quelques sources lumineuses

	λ_0 (nm)	radiation	ν_0 (en 10^{14} Hz)	$\Delta\nu_0$ (Hz)	τ_c (s)	L_c	L_c
Lumière blanche	400 à 800		7,5 – 3,5	4×10^{14}	$2,5 \times 10^{-15}$	750 nm	$\cong \lambda_0$
Vapeur de mercure (haute pression)	546,1	verte	5,49	10^{12}	10^{-12}	0,3 mm	$\cong 550 \lambda_0$
Vapeur de mercure (basse pression)	546,1	verte	5,49	10^9	10^{-9}	0,3 m	$\cong 5 \times 10^5 \lambda_0$
Vapeur de cadmium	643,8	rouge	4,66	10^9	10^{-9}	0,3 m	$\cong 5 \times 10^5 \lambda_0$
Laser He-Ne ordinaire	632,8	rouge	4,74	10^9	10^{-9}	0,3 m	$\cong 5 \times 10^5 \lambda_0$
Laser He-Ne stabilisé	632,8	rouge	4,74	10^4	10^{-4}	30 km	$\cong 5 \times 10^{10} \lambda_0$

Fig. 13 – Propriétés de cohérence temporelle de quelques sources lumineuses.

E. Les récepteurs de lumière ou photodétecteurs

Les vibrations lumineuses ayant des fréquences de l'ordre de 10^{14} Hz, il n'existe pas de détecteurs capables de suivre l'évolution temporelle de ces ondes de durée caractéristique τ ³. Les détecteurs usuels ne sont donc pas sensibles à la phase, mais à des grandeurs moyennées, ou intégrées, sur le temps de réponse caractéristique τ_{ph} du photodétecteur puisque $\tau_{ph} \gg \tau$.

1. Ce processus est donc l'opposé du processus d'absorption.

2. En toute rigueur, ceci n'est vrai que dans un mode du laser.

3. Ici, $\tau \approx 10^{-16}$ s.

1. Le domaine d'utilisation est lié à la nature de la photocathode.

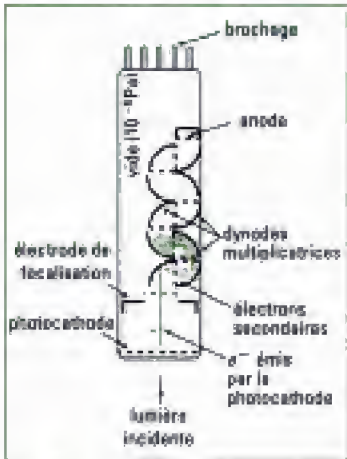


Fig. 14 – Détecteur du photomultiplicateur.
Dans le photomultiplicateur, une cathode émet des électrons par effet photoélectrique, sous l'action de la lumière incidente à mesurer. Ces électrons heurtent à leur tour une autre électrode appelée dynode, à un potentiel supérieur à celui de la cathode, et émettent de nouveaux électrons. Le phénomène en chaîne, constitué de chocs sur des dynodes de potentiels croissants libère des électrons de plus en plus nombreux pour former un courant final amplifié et détecté, qui donne ainsi une image du flux de photons incidents, par traitement du signal électrique obtenu.

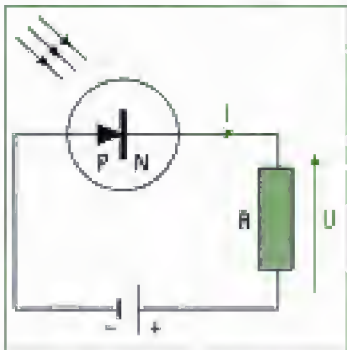


Fig. 15 – Montage à photodiode.

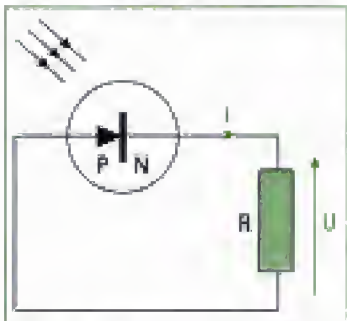


Fig. 16 – Montage à photopile.

Nous donnons ci-dessous un aperçu de trois photodétecteurs d'usage courant.

• **Le photomultiplicateur**

Cet appareil à réponse linéaire peut détecter jusqu'à un seul photon et travaille quel que soit le domaine de fréquence¹, avec un temps de réponse faible, de l'ordre de 10 à 100 nanosecondes.

• **La photodiode**

C'est une diode à jonction p-n utilisée en polarisation inverse (figure 15). Le courant dépend alors linéairement du flux lumineux.

La photodiode est un détecteur rapide, de temps de réponse en montage de l'ordre de 1 ns, linéaire et peu cher.

• **La photopile**

Certaines photodiodes peuvent aussi fonctionner en cellule photovoltaïque (ou photopile) dans lesquelles le photodétecteur devient générateur sous l'action de la lumière (figure 16). Le temps de réponse, en montage, est de l'ordre de 300 ns .

F. Phase et retard de phase d'une onde lumineuse le long d'un même rayon

Nous avons vu au paragraphe B.2. que nous pouvons associer à l'onde lumineuse monochromatique plane qui se propage, un vecteur :

$$\vec{E}(\vec{M}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_m \cos [\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi_s]$$

avec $\phi_M(\vec{r}, t) = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi_s$ qui désigne la phase de l'onde en M et $\varphi_M(\vec{r}) = \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_s$ le retard de phase en M.

Ceci signifie qu'en terme de lumière, l'histoire d'un point M dépend du temps qui s'écoule, de ce qui s'est passé au niveau de la source et de la position de ce point dans l'espace. Lorsque nous avons à examiner ce qui se passe physiquement en un point M, la question de la dépendance temporelle sera réglée par intégration sur le temps de réponse du récepteur, puisque nous ne pouvons accéder qu'à l'intensité lumineuse. Celle de la phase de la source à l'origine est une donnée du problème. Par contre, le terme $\vec{k} \cdot \vec{r}$ qui a été introduit comme un retard temporel de l'onde en M, va dépendre du chemin qui a été suivi par la lumière pour atteindre ce point.

En effet, le trajet effectivement suivi par la lumière, celui des rayons lumineux, est varié en raison des systèmes optiques interposés afin d'obtenir l'effet optique souhaité (lentilles, prisme, miroir, milieux différents traversés...). Le retard de l'onde, qui détermine de manière prépondérante les effets de cette onde, dépend de ce trajet qui, du point source au point M, est constitué d'une succession de droites quand les milieux intermédiaires sont supposés transparents, homogènes et linéaires.

F.1. Différence de phase entre deux points appartenant au même rayon lumineux se propageant dans un milieu homogène

• **Différence de phase $\phi_M - \phi_O$ le long d'un rayon lumineux**

Supposons qu'une onde associée à un rayon lumineux se propage dans un milieu transparent, homogène et linéaire d'indice n , à la vitesse v . Nous savons que sa trajectoire est une droite. L'onde associée à ce rayon est donc une onde plane et nous pouvons reprendre le formalisme précédemment établi.



Fig. 17 – Différence de phase entre deux points d'un même rayon lumineux.

1. De la même manière,

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi\nu}{v} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

2. La différence de retard de phase est souvent appelée déphasage ou différence de phase.

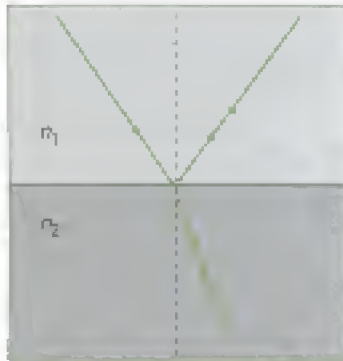


Fig. 18 – Onde changeant de milieu.

3. L'utilisation des coefficients de Fresnel pour la réflexion ou la réfraction en amplitude, pour une incidence normale, permet de retrouver ces résultats. Le coefficient de réflexion est

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \text{ négatif si } n_2 > n_1,$$

ce qui traduit un déphasage de π . Le coefficient

$$\text{de transmission } t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \text{ est,}$$

lui, toujours positif.

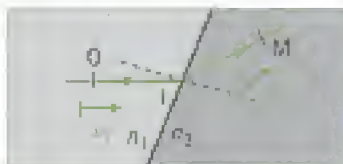


Fig. 19 – Détermination de la différence de phase entre deux points situés le long d'un rayon reliant deux points O et M situés chacun dans un milieu homogène et transparent.

Choisissons une origine O sur cette droite orientée par le vecteur unitaire \vec{e} placé dans le sens de propagation de la lumière.

Ainsi, $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\vec{e}$ et $\vec{k} = k\vec{e}$ (figure 17).

Puisque $\phi_M(\vec{r}, t) = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \phi_0$, il vient :

$$\phi_M - \phi_0 = (\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \phi_0) - (\omega t - \vec{k} \cdot \vec{0} - \phi_0) = -\vec{k} \cdot \vec{r} = -\vec{k} \cdot \overrightarrow{OM}.$$

Or, $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi\nu}{v} = \frac{2\pi n\nu}{c} = \frac{2\pi n}{cT} = \frac{2\pi n}{\lambda_0}$. On a donc aussi :

$$\phi_M - \phi_0 = -\frac{2\pi n}{\lambda_0} \vec{e} \cdot \overrightarrow{OM}.$$

• Différence de retard de phase² $\phi_M - \phi_0$ le long d'un rayon lumineux

Comme $\phi_M(\vec{r}, t) = \omega t - \phi_M(\vec{r})$, nous en déduisons qu'en M, à n'importe quelle date, $\phi_M - \phi_0 = \omega t - \phi_M - \omega t + \phi_0$. Ainsi,

$$\phi_M - \phi_0 = -(\phi_M - \phi_0) = \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{2\pi n}{\lambda_0} \vec{e} \cdot \overrightarrow{OM}.$$

Les points O et M étant disposés comme indiqué précédemment, conformément au paragraphe B.2., le retard de phase de M par rapport à O est positif en raison du choix de l'écriture $s = a \cos(\omega t - \phi_M)$.

• Propriétés particulières de la phase

À la surface de deux milieux d'indices n_1 et n_2 différents, il se produit une réflexion et éventuellement une réfraction (figure 18). La rencontre de la limite du milieu peut alors s'accompagner pour l'onde d'une modification de sa phase. Cette modification se produit aussi à la réflexion sur un miroir, c'est-à-dire sur une surface métallique, au passage par un foyer ou un point de convergence d'un faisceau, au passage d'un diaphragme diffractant.

Ces propriétés, qui ne peuvent s'expliquer que dans la théorie de Maxwell, sont les suivantes :

Propriété 10

Il faut ajouter un déphasage de π à l'onde si :

- la réflexion de l'onde se fait sur la surface de séparation, depuis un milieu d'indice n_1 et sur un milieu d'indice n_2 avec $n_1 < n_2$;
- la réflexion de l'onde se fait sur un miroir ou une surface métallique ;
- l'onde passe par un foyer ponctuel ou une zone de convergence ponctuelle.

Il faut ajouter un déphasage de $\frac{\pi}{2}$ au passage d'un diaphragme diffractant.

Les discontinuités de phase sont cumulatives. Dans les autres cas, comme les transmissions, il y a continuité de la phase.

F.2. Retard de phase le long d'un rayon lumineux lors de la traversée de plusieurs milieux homogènes successifs

• Cas de deux milieux homogènes successifs d'indices n_1 et n_2 (figure 19)

La continuité de la phase lors de la transmission permet d'écrire :

$$\phi_M - \phi_0 = (\phi_M - \phi_I) + (\phi_I - \phi_0) = \frac{2\pi n_2}{\lambda_0} \vec{e}_2 \cdot \overrightarrow{IM} + \frac{2\pi n_1}{\lambda_0} \vec{e}_1 \cdot \overrightarrow{OI}$$

soit encore :

$$\phi_M - \phi_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_2 \vec{e}_2 \cdot \overrightarrow{IM} + n_1 \vec{e}_1 \cdot \overrightarrow{OI}).$$

1. Nous avons défini le chemin optique à partir du trajet d'un rayon lumineux, ce qui est habituellement le cas. La notion de chemin optique est cependant plus large et valable si le trajet n'est pas celui d'un rayon lumineux, ce que nous admettons (cf. exercice 3). Le chemin optique est aussi noté (L) .

2. Si les propriétés du milieu, par son indice ou la présence de diaphragmes interposés, varient rapidement à l'échelle de la longueur d'onde, il y a diffraction. Pour une ouverture de dimension b , l'écart angulaire θ_s à la propagation linéaire est $\theta_s = \frac{\lambda}{b}$ (cf. figure 20).

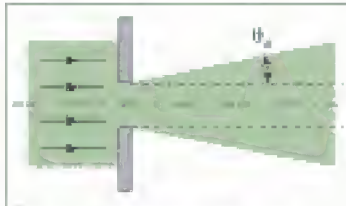


Fig. 20 – Diffraction par une ouverture de largeur b .



Fig. 21 – Différentielle du chemin optique : $\overline{AA'}$ est un déplacement élémentaire qui produit une petite variation de chemin optique entre A et B.

La quantité $n_2 \vec{e}_2 \cdot \overline{IM} + n_1 \vec{e}_1 \cdot \overline{OI}$, notée (OM) , est appelée **chemin optique** de O à M¹. La différence de phase le long du rayon lumineux s'écrit donc :

$$\varphi_M - \varphi_O = \frac{2\pi}{\lambda_0} (OM).$$

Dans le cas évoqué, comme $\vec{e}_2 \cdot \overline{IM} = IM$ et $\vec{e}_1 \cdot \overline{OI} = OI$, alors :

$$(OM) = n_1 OI + n_2 OM.$$

• Cas de m milieux successifs

Dans ce cas, par simple sommation, nous obtenons :

$$\varphi_M - \varphi_O = \frac{2\pi}{\lambda_0} (OM)$$

avec $(OM) = \sum_{q=1}^m n_q \vec{e}_q \cdot \vec{r}_q$ et \vec{r}_q le rayon vecteur associé au parcours rectiligne dans le milieu référencé q .

F.3. Retard de phase dans un milieu dont l'indice varie continûment

• Chemin optique

Le milieu de propagation est linéaire, localement isotrope, inhomogène. Dans ce cas, nous avons montré en première année que les trajectoires de la lumière sont des courbes.

Sur une échelle d'espace très supérieure à la longueur d'onde², par extension du résultat précédent :

$$(OM) = \sum_{q=1}^m n_q \vec{e}_q \cdot \vec{r}_q,$$

qui concerne une suite discrète de milieux, nous obtenons pour le parcours de la lumière le long du chemin AB :

$$(AB) = \int_A^B n(M) \vec{e} \cdot d\vec{r}$$

où :

- $n(M)$ est l'indice du milieu, qui dépend du point M considéré ;
- \vec{e} est le vecteur unitaire tangent à la trajectoire de la lumière en M et orienté dans le sens de propagation de la lumière ;
- $d\vec{r}$ est le déplacement élémentaire en M le long de cette trajectoire.

• Retard de phase

Pour une onde monochromatique de longueur d'onde λ_0 , le retard de phase entre deux points A et B choisis le long du parcours de la lumière entre A et B, est égal à :

$$\varphi_B - \varphi_A = \frac{2\pi}{\lambda_0} (AB), \text{ avec } (AB) = \int_A^B n(M) \vec{e} \cdot d\vec{r}.$$

F.4. Différentielle du chemin optique dans un milieu homogène

Dans un milieu homogène d'indice n , considérons un chemin optique (AB) qu'une petite variation amène à (A'B) (figure 21).

Par définition : $(AB) = n \vec{e} \cdot \overline{AB} \Rightarrow d(AB) = n d\vec{e} \cdot \overline{AB} + n \vec{e} \cdot d\overline{AB}$

Or, $\vec{e} \cdot \vec{e} = 1$ entraîne $\vec{e} \cdot d\vec{e} = 0$, et donc : $d\vec{e} \perp \overline{AB}$. Ainsi :

$$d(AB) = n \vec{e} \cdot d\overline{AB}.$$

Comme $d\overline{AB} = \overline{A'B} - \overline{AB} = -(\overline{BA'} - \overline{BA}) = -\overline{AA'}$, nous obtenons donc :

$$d(AB) = -n\vec{e} \cdot \overline{AA'}.$$

Ce résultat revêt une importance toute particulière dans l'étude des interférences, objet des chapitres 2, 3, 4 et 5. Cette opération est particulièrement importante lorsque le point A est un point source, car l'opération physique réalisée revient à élargir la source, supposée jusque-là ponctuelle, et donc à se rapprocher de la réalité des sources, qui sont étendues.

F.5. Principe du retour inverse de la lumière

Ce principe indique que dans un milieu transparent et isotrope, le trajet effectivement suivi par la lumière entre deux points A et B situés sur un même rayon lumineux est indépendant du sens de propagation de la lumière entre ces deux points.

Dans ce cas :

$$(AB) = \int_A^B n(M) \vec{e} \cdot d\vec{r} = - \int_B^A n(M) \vec{e} \cdot d\vec{r} = \int_B^A n(M) \vec{e} \cdot d\vec{r}' = (BA)$$

avec $d\vec{r}' = -d\vec{r}$.

Les trajets effectivement suivis par la lumière entre deux points d'un rayon lumineux, dans un sens de propagation comme dans l'autre, correspondent à des chemins optiques égaux¹.

1. Nous avons comparé ici le trajet AB parcouru de A vers B par la lumière avec le trajet BA parcouru de B vers A.

2. Le chemin optique est une grandeur algébrique, positive si le déplacement le long du rayon se fait dans le sens de propagation de la lumière, négative dans le sens contraire.

G. Expressions du chemin optique

De la relation précédente donnant le chemin optique $(AB) = \int_A^B n(M) \vec{e} \cdot d\vec{r}$, nous pouvons déduire une autre expression. En effet, si s est l'abscisse le long de la courbe C_{AB} suivie par la lumière, la relation cinématique $\vec{e} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ donne $\vec{e} ds = d\vec{r}$ et donc $ds = \vec{e} \cdot d\vec{r}$.

Ainsi :

$$(AB) = \int_A^B n(M) \vec{e} \cdot d\vec{r} = \int_A^B n(M) ds.$$

D'autre part, la durée du parcours de la lumière pour se déplacer de A à B le long de la courbe C_{AB} réellement suivie par la lumière entre A et B est :

$$\Delta t = \int_A^B \frac{ds}{v(M)},$$

que l'on peut encore écrire, vu que $n(M) = \frac{c}{v(M)}$:

$$\Delta t = \int_A^B \frac{n ds}{c} = \frac{1}{c} \int_A^B n ds = \frac{1}{c} (AB), \text{ d'où : } (AB) = c \Delta t.$$

Nous remarquons que $c\Delta t$ représente la distance parcourue par la lumière dans le vide, à la célérité c , pendant la durée de parcours Δt .

Définition 14

Le **chemin optique** entre deux points A et B d'une trajectoire suivie par la lumière dans un milieu représente la distance que parcourrait la lumière dans le vide, pendant la durée Δt nécessaire au parcours AB.

1. Les surfaces d'onde sont donc des surfaces équiphasées et elles jouent un rôle prépondérant en optique. Cependant, cette notion est à manipuler avec précaution car si l'on compare les deux définitions de début de paragraphe, nous nous apercevons que la définition de la surface d'onde qui utilise la phase occulte l'autre paramètre pourtant important de l'onde qui est son amplitude, paramètre qui est lui présent dans la première définition.

2. Du théorème de Malus-Dupin.

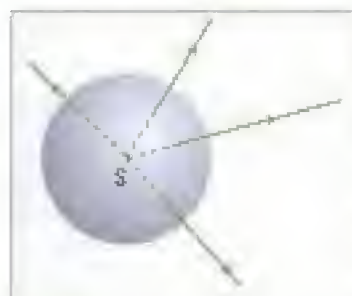


Fig. 22 – Surface d'onde sphérique.

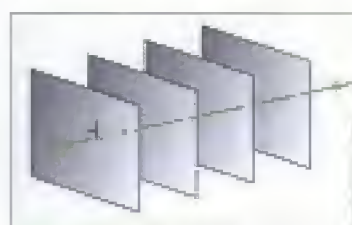


Fig. 23 – Plans d'onde.

H. Surfaces d'ondes

Comme définie précédemment, une surface d'onde est :

- l'ensemble des points de l'espace atteints par l'onde tels que $s(M, t)$ soit uniforme, c'est-à-dire égal à une constante, à un instant donné ;
- une surface sur laquelle la phase de l'onde est constante à un instant donné.

Dans un milieu transparent et isotrope d'indice n , pour une source ponctuelle S et un point M sur un rayon lumineux issu de S , nous obtenons que :

$$\varphi_M - \varphi_S = \frac{2\pi}{\lambda_0} (SM)$$

est une constante le long d'un parcours de la lumière. Ainsi, le chemin optique (SM) est lui-même constant.

Étant donnée l'émission naturellement incohérente des atomes dans les sources classiques, cette notion est bien évidemment relative à un point de la source et n'a de généralité que pour une source lumineuse ponctuelle.

Définition 15

Une surface d'onde Σ est le lieu des points situés à égal chemin optique d'une même source ponctuelle¹.

En figures 22 et 23 sont représentées les surfaces d'onde dues à une source ponctuelle dans un milieu homogène, isotrope et transparent, d'abord près de la source (figure 22), puis loin de la source (figure 23).

I. Théorème de Malus²

Ce théorème, dû à Malus (1808), démontré par Dupin (1816), généralise les résultats précédents.

Théorème 1

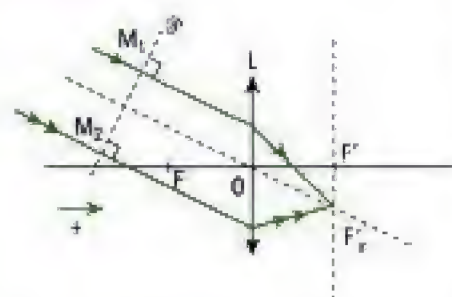
Dans un ensemble de milieux isotropes, après un nombre quelconque de réflexions ou de réfractions, les rayons lumineux issus d'un même point source sont **normaux** aux surfaces d'onde.

Application 2 Cas d'une lentille éclairée en lumière parallèle

Deux rayons lumineux parallèles arrivent sur une lentille convergente en étant inclinés sur l'axe de cette lentille. Soient deux points M_1 et M_2 situés à l'intersection de ces deux rayons avec un plan \mathcal{P} perpendiculaire à ces deux rayons, en amont de la lentille.

F'_S désignant le point de convergence de ces rayons, montrons que $(M_1 F'_S) = (M_2 F'_S)$.

Solution



Nous savons que ces deux rayons lumineux convergent, au-delà de la lentille, au foyer secondaire.

Utilisons la loi du retour inverse de la lumière en imaginant une source ponctuelle en F'_S émettant vers la lentille un faisceau qui émerge sous forme d'un faisceau parallèle.

Le plan \mathcal{P} étant perpendiculaire aux rayons issus de F'_S , il constitue un plan d'onde et donc $(F'_S M_1) = (F'_S M_2)$ en appliquant la définition vue au paragraphe précédent.

Or, d'après la loi du retour inverse de la lumière, nous avons : $(F'_S M_1) = (M_1 F'_S)$ et $(F'_S M_2) = (M_2 F'_S)$.

Nous en déduisons que : $(M_1 F'_S) = (M_2 F'_S)$; la proposition est donc démontrée.

L'essentiel

✓ L'onde plane

• La vibration associée à une onde plane progressive monochromatique qui se propage dans le sens des z croissants s'écrit $s(M, t) = a \cos(\omega t - kz - \varphi_s)$ au point M d'abscisse z , avec :

• $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi n}{\lambda_0}$, la norme du *vecteur d'onde* $\vec{k} = k\vec{e}_z$, dirigé suivant la direction de propagation ;

• φ_s , le terme de retard de phase, constant, dû à la source ;

• ω , la pulsation ($\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$) ou fréquence angulaire de l'onde ;

• a , un réel positif, l'amplitude de la vibration.

Une OPPM est doublement périodique :

• $T = \frac{2\pi}{\omega}$ est la période temporelle de l'onde ;

• $\lambda_0 = cT$ est la période spatiale de l'onde, ou longueur d'onde.

• En un point M d'un plan d'onde tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$, la vibration associée à une onde plane progressive harmonique de **direction quelconque** peut s'écrire :

$$- s(M, t) = s(\vec{r}, t) = a \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi_s)$$

ou bien $- s(M, t) = s(\vec{r}, t) = a \cos(\phi_M)$

avec $\phi_M(\vec{r}, t) = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi_s$ la phase de la vibration en M ,

ou bien $- s(M, t) = s(\vec{r}, t) = a \cos(\omega t - \varphi_M)$

avec $\varphi_M(\vec{r}) = \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_s$ le retard de phase de l'onde au point M .

Ainsi, $\phi_M(\vec{r}, t) = \omega t - \varphi_M(\vec{r})$.

• Les **surfaces d'onde**, ou surfaces équiphasées, d'une onde plane qui se propage selon Oz , sont des plans d'abscisse z constante.

✓ L'onde sphérique

• On appelle **onde sphérique** une onde se propageant dans un espace à trois dimensions et dont les surfaces d'onde sont des sphères.

• La vibration associée à une onde sphérique sinusoïdale s'écrit :

$$s_p(M, t) = \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - kr - \varphi_s), \text{ avec } A_0 \text{ constante.}$$

• À grande distance de la source, l'onde sphérique peut-être considérée comme **localement plane**.

✓ Polarisation des ondes lumineuses

La **direction de polarisation** en un point M atteint par l'onde est celle du champ électrique en ce point. Si le champ électrique garde une direction fixe dans l'espace, la polarisation est dite *rectiligne* et le plan formé par \vec{E} et \vec{k} est le plan de polarisation de l'onde.

✓ Notation complexe

Pour le champ électrique, responsable des effets optiques, dans le cas d'une polarisation selon l'axe Ox , nous avons :

$$\vec{E} = E_m \exp j(\omega t - kz - \varphi_s) \vec{e}_x = \underline{E}_m \exp j(\omega t) \vec{e}_x$$

avec \underline{E}_m l'amplitude complexe telle que : $\underline{E}_m = E_m \exp j(-kz - \varphi_s)$.

✓ Caractéristiques des ondes lumineuses

Le spectre de la lumière visible s'étend de 380 nm, pour le violet, à 780 nm pour le rouge. L'ordre de grandeur des fréquences associées est 10^{14} Hz.

Dans un milieu transparent d'indice n , la vitesse de la lumière est :

$$v = \frac{c}{n}, \text{ avec } c = 299\,792\,458 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

✓ Intensité lumineuse

Dans le cas de l'onde plane harmonique polarisée rectilignement, l'intensité lumineuse I s'écrit :

$$I = E_m^2 = 2\langle \vec{E}^2 \rangle_t = 2\langle E^2 \rangle_t = \underline{E} \underline{E}^* = \underline{E}_m \underline{E}_m^*.$$

L'intensité lumineuse est proportionnelle à l'éclairement \mathcal{E} et dans l'usage, ces deux grandeurs sont confondues.

✓ Les sources de lumière

On distingue :

- les sources « classiques » qui relèvent de l'émission spontanée : lampes au tungstène, lampes quartz-iode, lampes spectrales...
- les sources qui relèvent de l'émission stimulée comme le laser pour lequel l'onde électromagnétique émise a même direction, même fréquence, même phase, même polarisation.

✓ Phase et retard de phase d'une onde lumineuse le long d'un même rayon

- Le long d'un rayon lumineux, l'onde progressant de O vers M, la **différence de retard de phase**, ou déphasage est :

$$\varphi_M - \varphi_O = \frac{2\pi n}{\lambda_0} \vec{e} \cdot \overrightarrow{OM} = \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM}.$$

- La phase subit une discontinuité de π si :

- la réflexion de l'onde se fait sur la surface de séparation, depuis un milieu d'indice n_1 et sur un milieu d'indice n_2 avec $n_1 < n_2$;
- la réflexion de l'onde se fait sur un miroir ou une surface métallique ;
- l'onde passe par un foyer ponctuel ou une zone de convergence ponctuelle.

La phase subit une discontinuité de $\frac{\pi}{2}$ si l'onde passe par un diaphragme diffractant.

✓ Chemin optique – Surface d'onde

- Le **chemin optique (AB)** entre deux points A et B d'un rayon lumineux est :

$$(AB) = \int_A^B n(M) \vec{e} \cdot d\vec{r}$$

où \vec{e} est le vecteur unitaire tangent au rayon lumineux au point M considéré.

- Le chemin optique dans un milieu matériel est aussi la distance parcourue par la lumière dans le vide, à la célérité c , pendant la durée de parcours Δt dans la matière :

$$(AB) = c \Delta t.$$

- Une surface d'onde est le lieu des points situés à **égal chemin optique** d'une même source ponctuelle.

✓ Théorème de Malus

Dans un ensemble de milieux isotropes, après un nombre quelconque de réflexions ou de réfractions, les rayons lumineux issus d'un même point source sont normaux aux surfaces d'onde.

Mise en œuvre

Méthode n°1

Quand et comment utiliser la notation complexe en optique ondulatoire ?

On souhaite identifier dans quel cas il est utile d'utiliser la notation complexe, associée à la notation réelle, et indiquer comment l'utiliser dans les calculs.

→ Savoir faire

- ❶ Il faut au préalable déterminer si son usage présente un intérêt ou non pour le problème posé. De manière générale, son intérêt se situe dans :

- les additions de deux vibrations ou plus, car cette notation allège les calculs qui sinon nécessitent de longues transformations de lignes trigonométriques. Cette addition se rencontrera dans la suite de l'ouvrage dans différentes situations : addition d'un nombre fini ou infini de vibrations, addition de vibrations de pulsations identiques ou non, somme continue de vibrations en diffraction... Enfin, dans certains cas, cette notation peut s'avérer utile comme dans l'étude de la polarisation ;
- les calculs d'intensité lumineuse, sachant que cette grandeur est égale (ou proportionnelle) au carré du module de la vibration écrite en notation complexe.

- ❷ Écrire la vibration en notation complexe associée à la notation réelle $s(\vec{r}, t)$:

$$\underline{s}(\vec{r}, t), \text{ avec } s(\vec{r}, t) = \Re\{\underline{s}(\vec{r}, t)\}.$$

Si $s(\vec{r}, t) = a \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi_s)$, alors :

$$\underline{s}(\vec{r}, t) = a \exp(-j\varphi_M) \exp(j\omega t) = \underline{A}(M) \exp(j\omega t)$$

avec : $\varphi_M = \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_s$;

$\underline{A}(M) = a \exp(-j\varphi_M)$, qui désigne l'amplitude complexe de la vibration $\underline{s}(\vec{r}, t)$.

La plupart du temps, les calculs peuvent être menés sur la seule amplitude complexe car :

- soit le terme $\exp(j\omega t)$ n'apparaît pas dans le résultat final (calcul d'une intensité lumineuse) ;
- soit il suffit de multiplier l'amplitude complexe de la grandeur calculée par le terme $\exp(j\omega t)$ en fin de calcul, avant de repasser en notation réelle si besoin est.

- ❸ Effectuer le calcul en notation complexe.

- ❹ Extraire le résultat demandé en repassant au besoin à la notation réelle qui est la seule à posséder un sens physique.

→ Application

Déterminer la vibration puis l'intensité lumineuse résultant de la superposition d'une infinité d'ondes dont la vibration complexe de la $n^{\text{ème}}$ onde s'écrit :

$$\underline{s}(\vec{r}, t) = a T R^n \exp[j(\omega t - n\varphi)]$$

a , T , R et φ étant des constantes avec en outre $R < 1$ et n un entier naturel.

Solution

- La notation complexe est ici imposée par l'énoncé et se justifie par le fait que l'on souhaite déterminer la vibration résultante due à une infinité d'ondes.
- L'énoncé donne également l'écriture de la vibration en notation complexe. Nous conserverons le terme $\exp(j\omega t)$ contenant la dépendance temporelle de l'onde.
- On calcule la vibration complexe associée à la superposition de l'infinité d'ondes :

$$\begin{aligned}\underline{s}(\vec{r}, t) &= aTR^0 \exp(j\omega t) + aTR^1 \exp[j(\omega t - \varphi)] + aTR^2 \exp[j(\omega t - 2\varphi)] + \dots \\ &= aT \exp(j\omega t) [1 + R \exp(-j\varphi) + (R \exp(-j\varphi))^2 + (R \exp(-j\varphi))^3 + \dots]\end{aligned}$$

On voit apparaître la somme d'une série entière de raison $R \exp(-j\varphi)$ dont le module est strictement inférieur à 1. La série converge donc, avec :

$$\underline{s}(\vec{r}, t) = \frac{aT}{1 - R \exp(-j\varphi)} \exp(j\omega t)$$

- Il reste à déduire l'intensité lumineuse I associée à cette superposition d'ondes :

$$I = \underline{s}(\vec{r}, t) \underline{s}^*(\vec{r}, t)$$

où $\underline{s}^*(\vec{r}, t)$ est la vibration complexe conjuguée de $\underline{s}(\vec{r}, t)$. On a donc :

$$I = \frac{aT}{1 - R \exp(-j\varphi)} \exp(j\omega t) \times \frac{aT}{1 - R \exp(j\varphi)} \exp(-j\omega t), \text{ soit :}$$

$$I = \frac{I_0 T^2}{1 + R^2 - 2R \cos \varphi},$$

en posant $I_0 = a^2$.

Méthode n°2

Comment déterminer un retard de phase ?

On souhaite dégager une méthode permettant la détermination d'un retard de phase $\varphi_M - \varphi_O$ en un point M le long d'un rayon issu du point O. Ce problème revient à chercher la phase de l'onde lumineuse au point M si la phase de l'onde au point O est prise comme référence des phases. On parle couramment de « déphasage » entre les points O et M.

→ Savoir faire

- Il faut commencer par choisir l'origine des phases la plus adéquate si l'énoncé ne l'impose pas. Dans certains cas, l'origine s'impose naturellement : par exemple lorsque le point source est clairement identifié, il sera pris comme origine. Lorsque l'on raisonne sur un rayon convergeant vers une image ponctuelle, il peut être plus profitable de la choisir comme origine.
- Déterminer le chemin optique (OM) mis en jeu en tenant compte des indices des milieux traversés par le rayon lumineux. Cette étape nécessite quelquefois de faire un peu de géométrie dans le plan.
- Multiplier le chemin optique (OM) par le module du vecteur d'onde $k = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ en se souvenant que λ_0 est la longueur d'onde dans le vide.

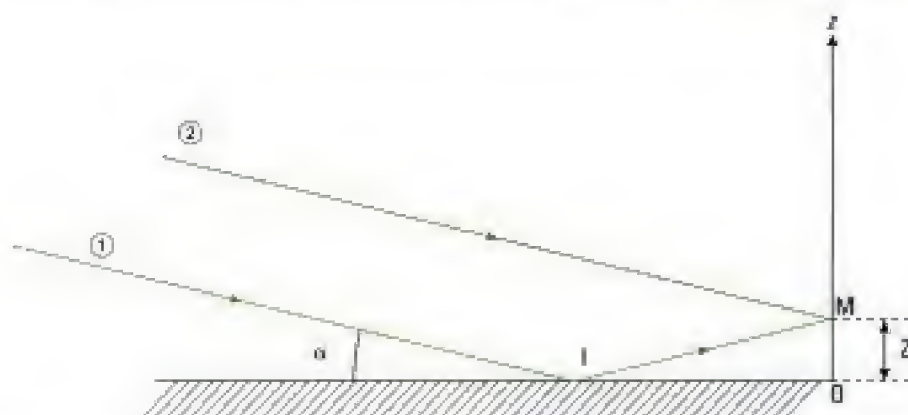


L'indice de réfraction est déjà pris en compte dans le chemin optique.

- Exprimer le retard de phase total $(\varphi_M - \varphi_O)_{\text{tot}}$ en ajoutant les éventuels déphasages supplémentaires : réflexion vitreuse d'un milieu vers un milieu d'indice de réfraction plus élevé, réflexion métallique dans certains cas, passage par un point de convergence, traversée d'un diaphragme diffractant.

→ Application

Un faisceau de lumière parallèle éclaire un miroir métallique en faisant un angle α avec la surface du miroir. On place un écran dont la trace dans le plan de figure est représentée par la direction Oz :

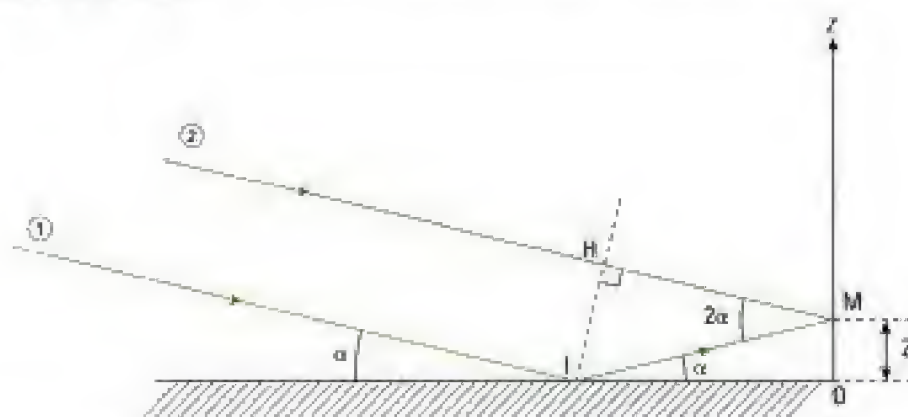


On distingue les rayons ① et ② issus du faisceau, le point d'incidence I, le point M sur l'écran et le point H projeté orthogonal de I sur ②. Le milieu de propagation est le vide et la réflexion sur le miroir s'accompagne d'un déphasage supplémentaire.

Déterminer le retard de phase de l'onde entre M et H, entre I et M puis le déphasage entre les deux rayons au point M.

Solution

- ① Commençons par placer le point H pour choisir l'origine des phases adaptée au calcul des deux retards de phase évoqués :



Pour le retard de phase entre les points M et H, ② étant orienté depuis H vers M, on choisit H comme origine, ce qui conduit à déterminer $\varphi_M - \varphi_H$. De même, on choisit I comme origine pour exprimer le retard $\varphi_M - \varphi_I$ entre les points I et M.

Notons que les points H et I appartiennent à un même plan d'onde car le faisceau incident est une onde plane de direction orthogonale à IH. Ceci signifie que I et H sont en phase : nous exprimerons le déphasage entre ① et ② en soustrayant le retard le plus faible au plus élevé pour faire apparaître une grandeur positive qui est plus simple d'interprétation.

- ② Pour le retard de phase $\varphi_M - \varphi_I$, on cherche le chemin optique (IM). Ici, l'indice du milieu est égal à 1, donc $(IM) = IM$. La loi de la réflexion sur le miroir métallique nous permet d'écrire $\widehat{OIM} = \alpha$. Dans le triangle OIM rectangle en O, on a :

$$IM = \frac{Z}{\sin \alpha}, \text{ d'où : } (IM) = \frac{Z}{\sin \alpha}.$$

Pour le retard de phase $\varphi_M - \varphi_H$, on cherche le chemin optique (HM). Ici l'indice du milieu est égal à 1, donc (HM) = HM. Une étude géométrique permet rapidement d'obtenir $HMI = 2\alpha$. Dans le triangle HIM rectangle en H, on a :

$$HM = IM \cos 2\alpha = \frac{Z \cos 2\alpha}{\sin \alpha}, \text{ d'où : } (HM) = \frac{Z \cos 2\alpha}{\sin \alpha}.$$

- ③ On multiplie les chemins optiques respectifs par le module du vecteur d'onde :

$$\varphi_M - \varphi_I = \frac{2\pi}{\lambda_0} (IM) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{Z}{\sin \alpha} \right)$$

$$\varphi_M - \varphi_H = \frac{2\pi}{\lambda_0} (HM) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{Z \cos 2\alpha}{\sin \alpha} \right).$$

- ④ Pour le retard de phase total entre I et M, il faut tenir compte du déphasage supplémentaire introduit par la réflexion sur la surface métallique, donc :

$$(\varphi_M - \varphi_I)_{\text{tot}} = \frac{2\pi}{\lambda_0} (IM) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{Z}{\sin \alpha} \right) + \pi.$$

Pour le retard de phase total entre H et M, il n'y a aucun déphasage supplémentaire à ajouter donc :

$$(\varphi_M - \varphi_H)_{\text{tot}} = \frac{2\pi}{\lambda_0} (HM) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{Z \cos 2\alpha}{\sin \alpha} \right).$$

Enfin, le déphasage $\Delta\varphi(M)$ entre les deux rayons au point M se déduit des résultats précédents en remarquant qu'ici on a nécessairement $\varphi_M - \varphi_H < \varphi_M - \varphi_I$.

Pour définir un déphasage positif, on écrit ici :

$$\Delta\varphi(M) = (\varphi_M - \varphi_I)_{\text{tot}} - (\varphi_M - \varphi_H)_{\text{tot}} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{Z}{\sin \alpha} (1 - \cos 2\alpha) \right) + \pi,$$

$$\text{d'où : } \Delta\varphi(M) = \frac{4\pi}{\lambda_0} Z \sin \alpha + \pi.$$

Exercices

Niveau 1

Ex. 1 Onde conjuguée

Soit $\underline{\varepsilon}$ l'amplitude complexe associée à une onde se propageant dans la direction \vec{u} . On appelle onde conjuguée $\underline{\varepsilon}^*$ l'onde de même plan d'onde mais se propageant dans la direction $-\vec{u}$.

- 1) Expliquer la dénomination « onde conjuguée ».
- 2) Comment obtenir $\underline{\varepsilon}^*$ à partir de l'onde associée à $\underline{\varepsilon}$ et d'un dispositif optique simple dans le cas d'une onde plane puis d'une onde sphérique ?

Oral, Centrale – Supélec MP 1998

Ex. 2 Reconstitution d'une image holographique

Lors de l'enregistrement d'un hologramme, on éclaire un film photographique avec une onde monochromatique d'amplitude complexe notée $\underline{\varepsilon}_0$ (onde de référence). Simultanément, un objet éclairé lui aussi par l'onde $\underline{\varepsilon}_0$ renvoie une onde $\underline{\varepsilon}$ en direction du film. On admet que la transmittance t en tout point M du film s'écrit :

$$t(M) = \alpha - \beta |\underline{\varepsilon}(M) + \underline{\varepsilon}_0(M)|^2$$

où α, β sont des réels positifs.

Si par la suite on éclaire le film avec l'onde $\underline{\varepsilon}_0$, on obtient une onde $\underline{\varepsilon}_1 = t \underline{\varepsilon}_0$ en tout point M .

- 1) Comparer qualitativement les amplitudes des deux ondes $\underline{\varepsilon}$ et $\underline{\varepsilon}_0$.
- 2) En effectuant les approximations nécessaires, montrer qu'après enregistrement le film permet de reconstituer l'image de l'objet.

D'après Oral, Centrale – Supélec MP 1998

Niveau 2

Ex. 3 Condition de stigmatisme rigoureux

On considère un système optique (S) quelconque. Un point objet A appartient à l'espace objet réel de (S). Le milieu constituant l'espace image réelle, auquel appartient le point A' , est supposé homogène et isotrope. À quelle condition tous les rayons issus de A passent-ils par A' après avoir traversé (S) ?

Ex. 4 Étude spectrale d'une source lumineuse

Après avoir été excités, les atomes, ions ou molécules constitutifs d'une source lumineuse retournent à leur état fondamental. Le champ électrique de l'onde émise peut être modélisé de la manière suivante :

$$\begin{cases} E(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ E(t) = E_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega_0 t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

où A_0 , τ et ω_0 sont des constantes pour une source donnée.

Données mathématiques (toute condition d'existence mathématique est admise) :

- Transformée de Fourier $\hat{\varepsilon}(v)$ de $\underline{\varepsilon}(t)$:

$$\hat{\varepsilon}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\varepsilon}(t) e^{-j2\pi vt} dt = \frac{E_0}{\frac{1}{\tau} + j2\pi(v - v_0)}$$

avec : v : variable homogène à une fréquence

$$v_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

$$j^2 = -1.$$

- Théorème de Parseval – Plancherel :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\underline{\varepsilon}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\varepsilon}(v)|^2 dv.$$

- 1) Donner la signification physique de :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\underline{\varepsilon}(t)|^2 dt.$$

- 2) Identifier la grandeur $w(v) = |\hat{\varepsilon}(v)|^2$ puis exprimer cette grandeur dans le cas du modèle de train d'ondes étudié dans cet exercice.

- 3) On souhaite utiliser ce modèle pour une lampe à mercure haute pression pour laquelle on donne :

- longueur d'onde associée à v_0 : $\lambda_0 = 546 \text{ nm}$
- largeur spectrale de la raie : $\Delta\lambda_0 = 0,2 \text{ nm}$

On admettra la relation : $\Delta v_0 \cdot \tau \approx \frac{1}{\pi}$.

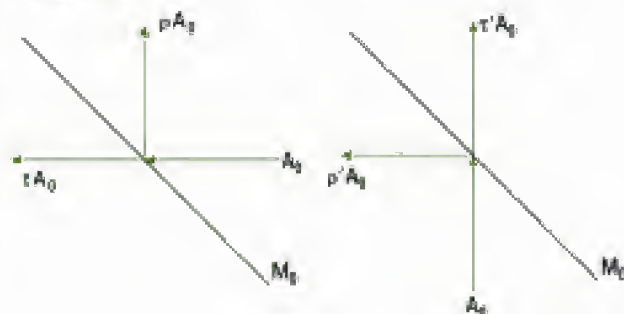
En déduire un ordre de grandeur de la durée de cohérence τ de cette source lumineuse puis représenter l'allure graphique de $w(v_0)$.

Niveau 3

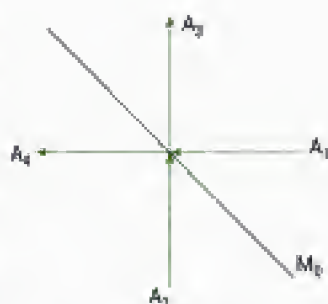
Ex. 5 Étude d'une cavité optique

- 1) On considère une lame non absorbante et semi-réfléchissante M_0 .

Les figures ci-dessous définissent les coefficients de réflexion et transmission selon la provenance de l'onde. Ces coefficients sont *a priori* des grandeurs complexes.



a) On considère deux ondes planes monochromatiques cohérentes. On ne tient pas compte de la polarisation (amplitudes scalaires A_1 et A_2). Elles arrivent sur M_0 respectivement de la droite et du bas.



Trouver les amplitudes des ondes A_3 et A_4 émergeant de la lame M_0 .

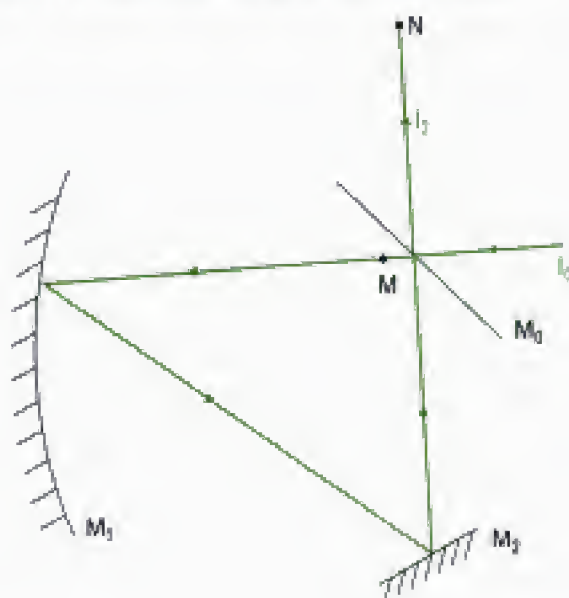
b) Montrer que :

$$|\rho|^2 + |\tau|^2 = 1 \text{ et } |\rho'|^2 + |\tau'|^2 = 1.$$

c) Trouver une autre relation entre ρ , τ , ρ' et τ' .

Dans la suite, on prendra $\rho = \rho' = j-r$ et $\tau = \tau' = r$ où $j^2 = -1$, r et r étant des nombres réels.

2) On ne considérera que l'onde ayant fait un seul tour de cavité (longueur totale ℓ), et pas celles ayant fait plusieurs tours. Le milieu de propagation est assimilé au vide. Les réflexions sur les miroirs M_1 et M_2 sont supposées sans pertes et sans déphasages.



Déterminer l'intensité I_1 au point M juste après M_0 en fonction de λ_0 , ℓ , I_0 , r et t . Donner de même I_2 au point N.

Oral, Mines - Ponts MP 1998

Ex. 6 Objet de phase

On étudie la formation de l'image A' d'un point objet A réel donné par une lentille convergente (L) de faible épaisseur utilisée dans les conditions de Gauss et placée dans l'air.

1) A étant situé sur l'axe optique de (L) à une distance D de son centre, exprimer en fonction des coordonnées (x, y) d'un point I du plan de la lentille, la phase de l'onde incidente au point I. On effectuera un calcul approché.

2) Déterminer de même la phase de l'onde émergente au point J en fonction de (x, y) .

3) Exprimer la différence de phase existant le long du rayon lumineux dirigé selon l'axe optique, entre les points A et A' .

4) On dir que la lentille est un objet de phase qui introduit un déphasage entre l'onde incidente et l'onde transmise. Préciser en fonction des résultats obtenus.

Indications

Ex. 3

Utiliser le théorème de Malus.

Ex. 4

1) Quel type de grandeur physique est définie à partir du carré d'une autre grandeur ?

Ex. 5

1) b) Puisque la lame M_0 est transparente, elle n'absorbe aucune énergie.

c) Le même principe doit être utilisé ce qui conduit à introduire des grandeurs complexes. De plus, le résultat final ne doit pas dépendre des ondes A_1 et A_2 .

Ex. 6

La lentille est de faible épaisseur mais n'est manifestement pas considérée comme mince : son épaisseur n'est donc pas négligeable.

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1

1) En reprenant les notations du cours pour l'amplitude complexe, on peut écrire :

$$\underline{s} = a \cdot e^{-j\varphi_0} = a \cdot e^{-j(k\vec{u} \cdot \vec{OM} + \varphi_0)}$$

La grandeur complexe conjuguée est :

$$\underline{s}^* = a \cdot e^{j(k\vec{u} \cdot \vec{OM} + \varphi_0)} = a \cdot e^{-j(k(-\vec{u}) \cdot \vec{OM} - \varphi_0)}$$

Cette dernière, qui possède les mêmes plans d'ondes que ceux de l'onde associée à \underline{s} (perpendiculaires à \vec{OM}), se propage donc dans la direction $-\vec{u}$.

2) • **Cas d'une onde plane associée à \underline{s}**

On peut utiliser une surface métallique ou un miroir orienté perpendiculairement à la direction \vec{u} (cas de l'incidence normale).

• **Cas d'une onde sphérique associée à \underline{s}**

On peut placer la source au foyer d'une lentille mince convergente laquelle est suivie d'un miroir plan perpendiculaire à l'axe optique (seule une portion de l'espace est alors atteinte par cette onde).

On peut aussi envisager la présence de la source au centre d'un miroir sphérique. Mais l'angle d'ouverture de ce dernier étant limité, seule une partie de \underline{s} sera réfléchi sous forme de \underline{s}^* .



Pour que \underline{s}^* puisse converger au point source, il ne peut s'agir que d'une source virtuelle.

Exercice 2

1) Il est tout à fait possible qu'une partie du faisceau incident sur l'objet, d'amplitude $|\underline{s}_0|$, n'atteigne pas cet objet (cas d'un faisceau de section transversale supérieure à la section droite de l'objet perpendiculaire à la direction du faisceau incident).

D'autre part, il y aura toujours une partie de la lumière réfléchi par l'objet qui n'atteindra pas le film photographique, entre autres à cause du phénomène de diffusion de la lumière par l'objet. Enfin, l'objet absorbe une partie du rayonnement.

Conclusion :

L'intensité lumineuse $I_0 = \underline{s}_0 \cdot \underline{s}_0^* = |\underline{s}_0|^2$ est plus importante que l'intensité $I = \underline{s} \cdot \underline{s}^* = |\underline{s}|^2$ réfléchi par l'objet. Ainsi :

$$|\underline{s}_0| > |\underline{s}|$$

2) On cherche l'équation qui définit l'amplitude de l'onde \underline{s}_1 transmise par le film éclairé par \underline{s}_0 après enregistrement :

$$\underline{s}_1 = t \cdot \underline{s}_0 \text{ avec } t = \alpha - \beta \cdot |\underline{s} + \underline{s}_0|^2 = \alpha - \beta \cdot (\underline{s} + \underline{s}_0) \cdot (\underline{s}^* + \underline{s}_0^*)$$

donc :

$$\underline{s}_1 = [\alpha - \beta \cdot (\underline{s} \cdot \underline{s}^* + \underline{s}_0 \cdot \underline{s}^* + \underline{s}_0 \cdot \underline{s}_0^* + \underline{s}^* \cdot \underline{s})] \cdot \underline{s}_0$$

En introduisant l'intensité $I = \underline{s} \cdot \underline{s}^*$ associée à l'onde \underline{s} et l'intensité $I_0 = \underline{s}_0 \cdot \underline{s}_0^*$ associée à l'onde \underline{s}_0 , il vient :

$$\underline{s}_1 = (\alpha - \beta \cdot I - \beta \cdot I_0) \cdot \underline{s}_0 - \beta \cdot \underline{s}_0^2 \cdot \underline{s}^* - \beta \cdot I_0 \cdot \underline{s}$$

L'énoncé suggère d'effectuer une approximation qui ne peut porter ici que sur les valeurs relatives de I_0 et I car nous avons indiqué à la question précédente que $I_0 > I$. Supposons donc que l'on puisse négliger I devant I_0 . Ainsi :

$$\underline{\varepsilon}_1 = \underbrace{(\alpha - \beta \cdot I_0) \cdot \underline{\varepsilon}_0}_{(1)} - \underbrace{\beta \cdot \underline{\varepsilon}_0^2 \cdot \underline{\varepsilon}^*}_{(2)} - \underbrace{\beta \cdot I_0 \cdot \underline{\varepsilon}}_{(3)}$$

Analysons les termes (1), (2) et (3).

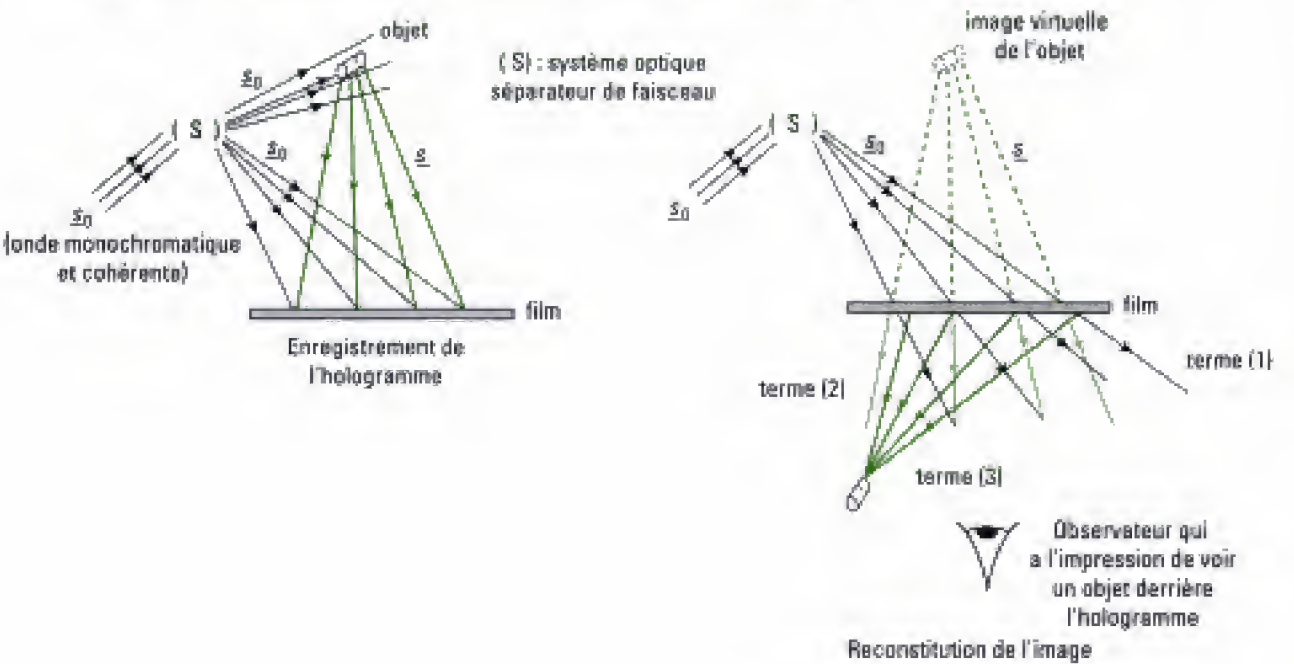
(1) est représentatif d'une onde de même nature (par exemple plane), même direction et même sens de propagation que $\underline{\varepsilon}_0$;

(2) est proportionnel, à un facteur complexe $\underline{\varepsilon}_0^2$ constant près, à l'onde $\underline{\varepsilon}^*$;

(3) est représentatif de l'onde $\underline{\varepsilon}$ émise par l'objet.

Les deux derniers termes permettent, sous certaines conditions, de donner une image de l'objet en tout point M du film. Si l'onde $\underline{\varepsilon}$ émise par l'objet est sphérique divergente, alors $\underline{\varepsilon}^*$ correspond à une onde sphérique convergente en un point de l'espace. Ainsi l'œil d'un observateur peut observer une image virtuelle de l'objet (terme (3)) ; une image réelle se forme également en sortie du film (terme (2)).

☀ Nous donnons ci-dessous deux représentations schématiques de l'enregistrement et de la reconstitution de l'image de l'objet afin de mieux comprendre le procédé de l'holographie :

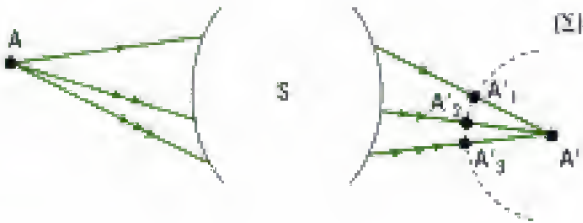


Exercices de niveau 2

Exercice 3

Si tous les rayons issus de A passent par A', le système (S) est rigoureusement stigmatique pour le couple de points (A, A').

Introduisons dans l'espace image réelle, la surface d'onde (Σ) qui coupe les rayons lumineux issus de (S) en A'₁, A'₂, A'₃, ... A'ᵢ.



Par définition d'une surface d'onde, il vient :

$$(AA'_1) = (AA'_2) = (AA'_3) = \dots (AA'_j) \quad (1)$$

De plus, le théorème de Malus permet d'ajouter que $A'A'_1, A'A'_2, A'A'_3, \dots A'A'_j$ sont perpendiculaires à (Σ) qui est donc nécessairement une sphère de centre A' . Ainsi :

$$A'_1A' = A'_2A' = A'_3A' = \dots A'_jA'.$$

Enfin, le milieu image étant homogène et isotrope, son indice de réfraction est uniforme dans ce milieu, donc :

$$(A'_1A') = (A'_2A') = (A'_3A') = \dots (A'_jA') \quad (2)$$

Les relations (1) et (2) conduisent à :

$(AA') = \text{constante.}$

Il s'agit là de la condition de stigmatisme rigoureux.



La connaissance de ce résultat n'est pas exigible.

Exercice 4

1) Commençons par écrire la vibration en notation complexe (cf. méthode 1) :

$$\underline{E}(t) = E_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot e^{im_0 t}.$$

On en déduit :

$$|\underline{E}(t)|^2 = \underline{E}(t) \cdot \underline{E}^*(t) = E_0^2 \cdot e^{-\frac{2t}{\tau}} = \langle E^2(t) \rangle_t$$

et ainsi :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\underline{E}(t)|^2 \cdot dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle E^2(t) \rangle_t \cdot dt.$$

Cette écriture fait apparaître un terme quadratique qui en physique caractérise, à une constante dimensionnée près, une grandeur énergétique.

Si l'on prend le cas particulier de l'onde plane, $\langle E^2(t) \rangle_t$ est proportionnelle à la puissance surfacique transportée par cette onde. Ainsi, $\langle E^2(t) \rangle_t \cdot dt$ est proportionnelle à une énergie surfacique élémentaire dW et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \langle E^2(t) \rangle_t \cdot dt = \int_{-\infty}^{+\infty} dW = W$$

représente une **grandeur proportionnelle à l'énergie surfacique totale émise par la source.**

Remarques

– Dans le cas de l'onde plane, la constante de proportionnalité est égale à $\epsilon_0 c$. La présence d'une constante de proportionnalité n'est pas gênante en soit car comme il a été dit en cours, en pratique on ne mesure que des *valeurs relatives*.

– L'intervalle d'intégration $]-\infty, +\infty[$ se réduit à « la durée d'existence » du champ $E(t)$.

2) • **Signification de $w(\nu) = |\tilde{s}(\nu)|^2$**

L'étude qualitative menée à la question associée à l'égalité de Parseval-Plancherel permet de conclure que la quantité $\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{s}(\nu)|^2 \cdot d\nu$ est également une grandeur énergétique, à une constante près. Mais l'étude est ici faite dans le domaine fréquentiel et non dans le domaine temporel.

$|\tilde{s}(\nu)|^2 \cdot d\nu$ est proportionnelle à l'énergie (surfacique) émise dans l'intervalle de fréquence élémentaire $d\nu$, $|\tilde{s}(\nu)|^2$ est donc proportionnelle à la répartition de l'énergie (surfacique) par unité de fréquence.

Conclusion :

$w(\nu) = |\tilde{s}(\nu)|^2$ représente la **répartition de l'énergie (surfacique) spectrale.**

• **Expression de $w(\nu)$**

Dans le cas du modèle étudié dans cet exercice, on a :

$$w(\nu) = \tilde{E}(\nu) \cdot \tilde{E}^*(\nu) = \frac{E_0^2}{\left[\frac{1}{\tau} + j2\pi(\nu - \nu_0) \right] \cdot \left[\frac{1}{\tau} - j2\pi(\nu - \nu_0) \right]}$$

et donc :

$$w(\nu) = \frac{E_0^2}{\left(\frac{1}{\tau} \right)^2 + 4 \cdot \pi^2 \cdot (\nu - \nu_0)^2}$$

⚠ La fréquence ν est une grandeur physique positive, aussi l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{E}(\nu)|^2 \cdot d\nu$ peut sembler inappropriée.

En fait, comme nous le vérifierons à la question suivante, $w(\nu)$ n'a de valeurs significatives que dans un petit intervalle de fréquences centré autour de ν_0 . L'écriture de cette intégrale n'est donc qu'un artifice de calcul dont l'intérêt réside dans l'utilisation de la transformée de Fourier ici connue.

Remarque

L'égalité de Parseval-Plancherel est une généralisation de l'identité de Parseval appliquée à une fonction T-périodique et développable en série de Fourier.

3) • **Ordre de grandeur de la durée de cohérence de la source lumineuse**

La durée de cohérence τ et la largeur spectrale en fréquence $\Delta\nu_0$ sont reliées par :

$$\Delta\nu_0 \cdot \tau \approx \frac{1}{\pi} .$$

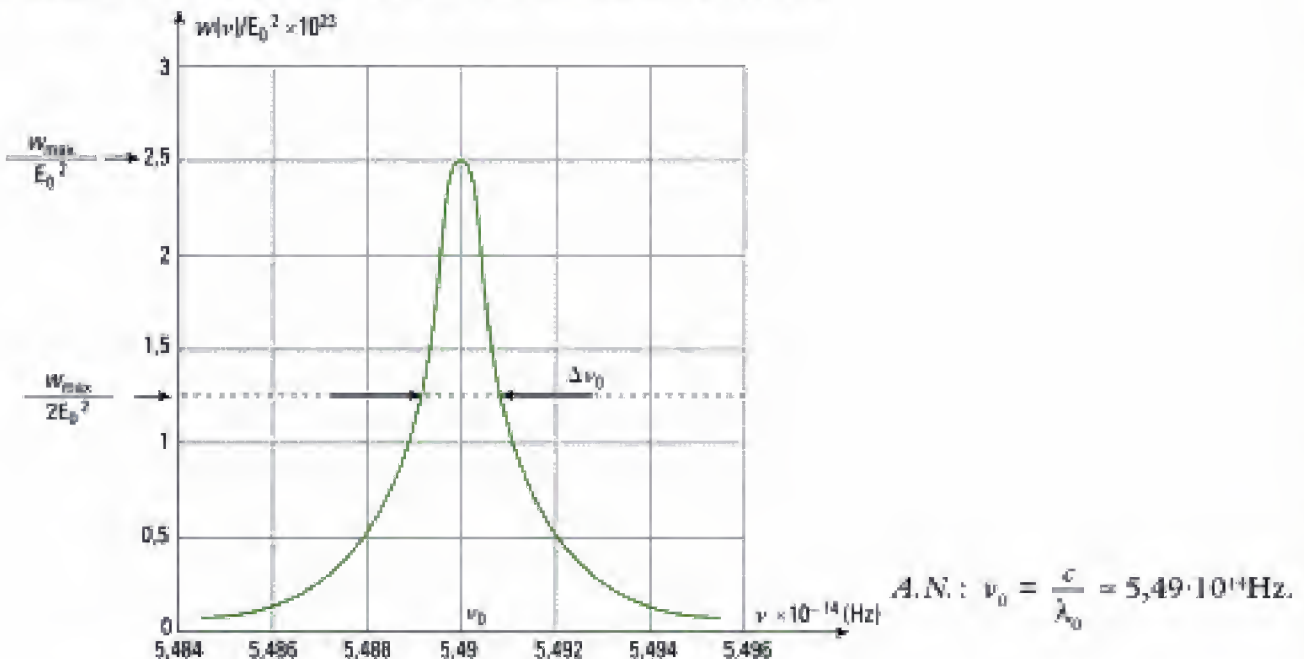
On introduit la largeur $\Delta\lambda_0$ avec :

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} \Rightarrow \frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\Delta\nu_0}{\nu_0} \Leftrightarrow \Delta\lambda_0 = \frac{\lambda_0^2}{c} \cdot \Delta\nu_0$$

donc :

$$\tau \approx \frac{\lambda_0^2}{\pi \cdot c \cdot \Delta\lambda_0} \quad \text{A.N. : } \tau \approx 1,58 \cdot 10^{-12} \text{ s.}$$

• **Allure de $w(\nu)$ pour la source mercure haute-pression**



La largeur spectrale à mi-hauteur se calcule soit avec $\Delta\nu_0 \approx \frac{1}{\pi \cdot \tau}$, soit avec $\Delta\nu_0 = \frac{c \cdot \Delta\lambda_0}{\lambda_0^2}$.



Ce profil spectral peut être comparé à celui donné en cours pour le profil gaussien. La densité utilisée ici, dite lorentzienne, est plus réaliste que celle associée au train d'ondes en forme de sinuséide tronquée.

Commentaire

Nous avons montré dans cet exercice comment à partir de la connaissance du modèle de train d'ondes choisi (ici celui du modèle sinuséidal amorti), on peut remonter à la représentation spectrale de la source étudiée. Dans la pratique, la démarche est effectuée dans l'autre sens : on mesure la représentation spectrale énergétique grâce à un spectroscopie, ce qui permet ensuite de décrire les variations temporelles de la vibration associée au train d'ondes. Cette représentation spectrale trouve également son utilité en spectrométrie interférentielle.

Exercices de niveau 3

Exercice 5

1) a) Les données et notations de l'exercice conduisent immédiatement à :

$$A_3 = \rho \cdot A_1 + \tau' \cdot A_2 \quad \text{et} \quad A_4 = \tau \cdot A_1 + \rho' \cdot A_2$$



Nous respectons ici les notations de l'énoncé mais il convient de noter que les amplitudes A_i sont des grandeurs complexes.

b) L'hypothèse de transparence de la lame M_0 est très importante ici, car elle permet d'appliquer le principe de conservation de l'énergie. Ce qui donne pour l'onde incidente A_0 :

$$|A_0|^2 = |\rho|^2 \cdot |A_0|^2 + |\tau|^2 \cdot |A_0|^2$$

et donc :

$$|\rho|^2 + |\tau|^2 = 1 \quad (1)$$

De même pour l'onde incidente A'_0 :

$$|\rho'|^2 + |\tau'|^2 = 1 \quad (2)$$

c) On utilise à nouveau le principe de conservation de l'énergie, qui s'écrit ici :

$$|A_3|^2 + |A_2|^2 = |A_1|^2 + |A_4|^2 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{avec : } |A_3|^2 &= A_3 \cdot A_3^* = (\rho \cdot A_1 + \tau' \cdot A_2) \cdot (\rho^* \cdot A_1^* + \tau'^* \cdot A_2^*) \\ &= |\rho|^2 \cdot |A_1|^2 + |\tau'|^2 \cdot |A_2|^2 + \rho \cdot \tau'^* \cdot A_1 \cdot A_2^* + \tau' \cdot \rho^* \cdot A_1^* \cdot A_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A_4|^2 &= A_4 \cdot A_4^* = (\tau \cdot A_1 + \rho' \cdot A_2) \cdot (\tau^* \cdot A_1^* + \rho'^* \cdot A_2^*) \\ &= |\tau|^2 \cdot |A_1|^2 + |\rho'|^2 \cdot |A_2|^2 + \rho' \cdot \tau^* \cdot A_1^* \cdot A_2 + \tau \cdot \rho'^* \cdot A_1 \cdot A_2^* \end{aligned}$$

La relation (3) donne alors :

$$\begin{aligned} |A_1|^2 + |A_2|^2 &= (|\rho|^2 + |\tau|^2) \cdot |A_1|^2 + (|\rho'|^2 + |\tau'|^2) \cdot |A_2|^2 + A_1 \cdot A_2^* \cdot (\rho \cdot \tau'^* + \tau \cdot \rho'^*) \\ &\quad + A_1^* \cdot A_2 \cdot (\tau' \cdot \rho^* + \rho' \cdot \tau^*). \end{aligned}$$

Ce qui se simplifie à l'aide des relations (1) et (2) selon :

$$A_1 \cdot A_2^* \cdot (\rho \cdot \tau'^* + \tau \cdot \rho'^*) + A_1^* \cdot A_2 \cdot (\tau' \cdot \rho^* + \rho' \cdot \tau^*) = 0.$$

En remarquant que le membre de gauche de cette équation est la somme de nombres complexes conjugués, il vient :

$$\Re\{(\rho \cdot \tau'^* + \tau \cdot \rho'^*) \cdot A_1 \cdot A_2^*\} = 0 \quad (4)$$

Le résultat ne devant pas dépendre du choix des ondes A_1 et A_2 , prenons les deux cas particuliers suivants :

- si $A_1 = A_2$, alors (4) donne: $\Re(\rho \cdot \tau'^* + \tau \cdot \rho'^*) = 0$ (5)

- si $A_1 = -jA_2$, alors (4) donne: $\Im(\rho \cdot \tau'^* + \tau \cdot \rho'^*) = 0$ (6)

Les relations (5) et (6) ne sont compatibles que si et seulement si :

$$\rho \cdot \tau'^* + \tau \cdot \rho'^* = 0.$$

 Les valeurs proposées dans l'énoncé $\rho = \rho' = j \cdot r$ et $\tau = \tau' = t$ vérifient cette relation comme il se doit.

2) • Intensité au point M


Le point M étant situé juste derrière M_0 , le chemin optique parcouru depuis M_0 vers M après un tour complet de la cavité est égal à ℓ . Les miroirs étant supposés sans pertes et n'introduisant aucun déphasage, le déphasage φ correspondant s'écrit :

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \ell \quad (\lambda_0 \text{ longueur d'onde dans le vide}).$$

En régime établi, l'amplitude complexe au point M est la somme de l'onde transmise par M_0 due à I_0 et de l'onde issue de M_2 et réfléchi par M_0 (principe de superposition) :

$$A(M) = t \cdot A_0 + \rho' \cdot A(M) \cdot e^{-j\varphi}$$

A_0 désignant l'amplitude de l'onde incidente prise pour origine des phases et en adoptant la notation complexe choisie dans le cours (cf. méthode 1).

 L'expression ci-dessus de $A(M)$ n'est valable qu'à partir du moment où l'onde lumineuse a fait un tour complet à l'intérieur de la cavité optique. Le régime transitoire peut raisonnablement être écarté, car de durée voisine de $\frac{\ell}{c}$, soit presque rien...

Ainsi :

$$A(M) = \frac{t \cdot A_0}{1 - j \cdot r \cdot e^{-j\varphi}}.$$

L'intensité I_1 s'écrit donc :

$$\begin{aligned} I_1 &= A(M) \cdot A^*(M) = \frac{t^2 \cdot A_0^2}{(1 - j \cdot r \cdot e^{-j\varphi}) \cdot (1 + j \cdot r \cdot e^{j\varphi})} \\ &= \frac{t^2 \cdot A_0^2}{|1 - j \cdot r \cdot e^{-j\varphi}|^2} \end{aligned}$$

avec: $|1 - j \cdot r \cdot e^{-j\varphi}|^2 = (1 - r \cdot \sin \varphi)^2 + (r \cdot \cos \varphi)^2 = 1 + r^2 - 2 \cdot r \cdot \sin \varphi$
 $t^2 = 1 - r^2$ d'après (1)

d'où :

$$I_1 = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2 \cdot r \cdot \sin \left(\frac{2\pi \cdot \ell}{\lambda_0} \right)} \cdot I_0$$

• Intensité au point N

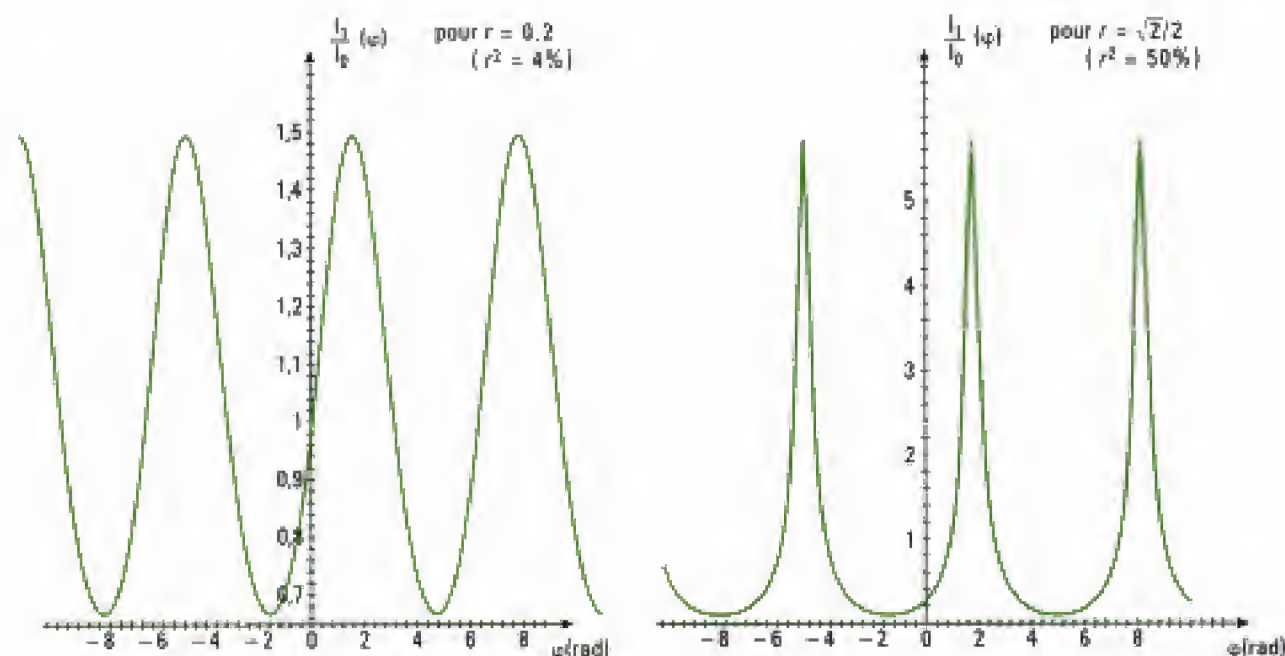
L'intensité I_1 réfléchi par M_0 est égale à celle qui est réfléchi par M_2 en direction de M_0 car les réflexions sur les miroirs sont supposées parfaites. M_0 étant en outre supposée transparente, le principe de conservation de l'énergie indique que :

$$I_2 = I_0.$$

Commentaire

Ce dispositif illustre le principe du laser en anneau (la source est donc un laser) dont l'étude ici est très partielle et simplifiée. On peut, sous certaines conditions et grâce à l'utilisation d'un milieu amplificateur de lumière, émettre une intensité I_2 quasi-monochromatique.

Nous avons représenté ci-dessous $\frac{I_1}{I_0}(\varphi)$ en fonction de φ pour deux valeurs différentes du coefficient de réflexion r en amplitude du champ électrique :



On constate que plus le pouvoir de réflexion de M_0 est élevé, et plus les pics d'intensité lumineuse sont fins et d'amplitude élevée. La cavité sélectionne alors des raies spectrales de longueur d'onde λ_0 pour lesquelles $\sin \varphi \approx 1$, soit :

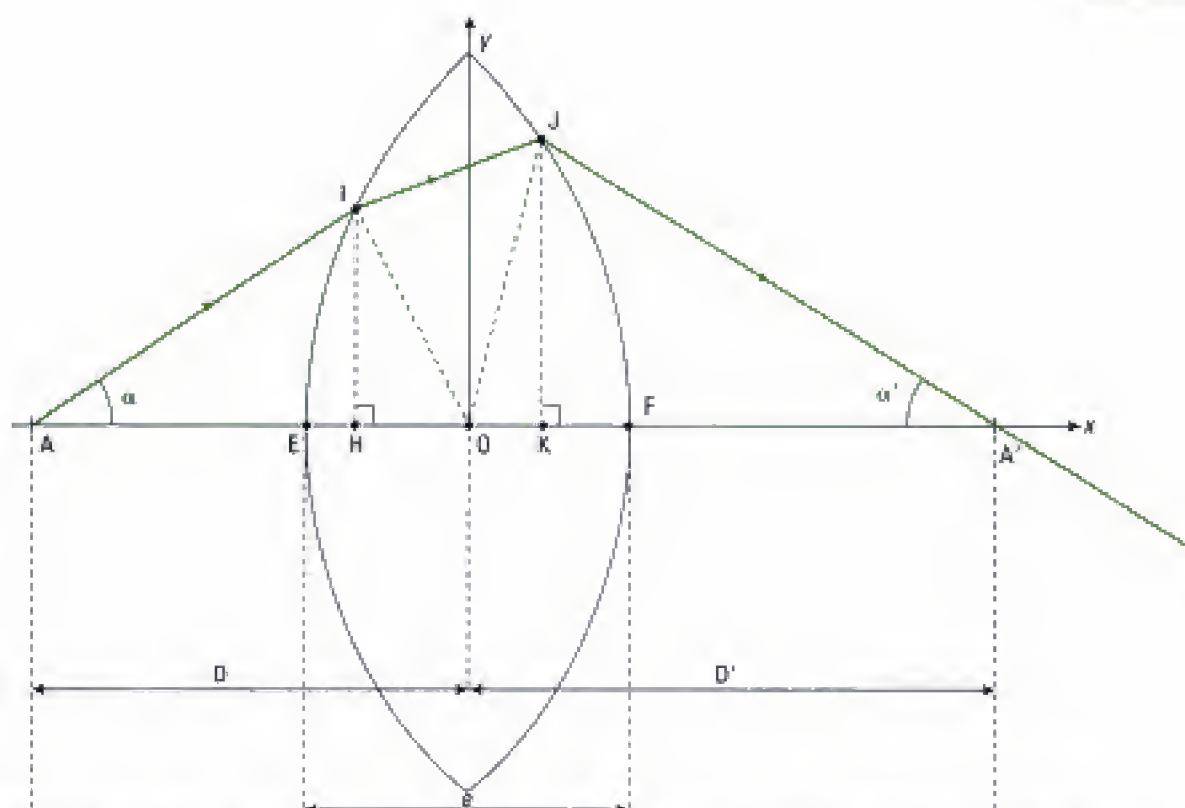
$$\frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \ell = \frac{\pi}{2} + 2m \cdot \pi, \quad (m \in \mathbb{N})$$

$$\Leftrightarrow \ell = \frac{\lambda_0}{4} + m \cdot \lambda_0 = \left(m + \frac{1}{4}\right) \cdot \lambda_0$$

On peut aussi dire que ce système optique se comporte comme un filtre qui sélectionne les radiations de longueurs d'onde $\lambda_0 = \frac{\ell}{m + \frac{1}{4}}$.

Exercice 6

1) Il faut déterminer le déphasage le long d'un rayon lumineux issu du point A et passant par I de coordonnées (x, y) dans le plan de front perpendiculaire à l'axe optique (cf. méthode 2). On peut ici commencer par évaluer le chemin optique (AI), ce qui nécessite une construction géométrique :



Pour plus de lisibilité, les valeurs de α et α' ont été accentuées car ils doivent satisfaire l'approximation de Gauss.

Nous avons également introduit :

- le centre optique O de (L) (nous avons supposé que les rayons de courbure des deux faces de (L) sont identiques) ;
- l'épaisseur de (L) au centre notée e ;
- la distance D' entre O et A' .

On calcule (AI) : $AI^2 = AH^2 + IH^2$ avec $IH^2 = OI^2 - OH^2$ où $OI^2 = x^2 + y^2$
 donc : $AI^2 = x^2 + y^2 + AH^2 - OH^2 = x^2 + y^2 + (AH - OH) \cdot (AH + OH)$
 avec : $AH + OH = D$, $AH - OH = D - 2OH$.

Il vient donc :

$$AI = \sqrt{x^2 + y^2 + D^2 - 2D \cdot OH} = D \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2 - 2D \cdot OH}{D^2}}$$

Utilisons les hypothèses de l'énoncé pour effectuer une première approximation :

- (L) est utilisée dans les conditions de Gauss, donc : $x \ll D$ et $y \ll D$;
- (L) est de faible épaisseur, donc : $OH \ll D$.

Ainsi, au premier ordre en $\frac{x^2 + y^2 - 2D \cdot OH}{D^2}$, on a :

$$AI = D \cdot \left(1 + \frac{x^2 + y^2 - 2D \cdot OH}{2D^2} \right) = D + \frac{x^2 + y^2 - 2D \cdot OH}{2D}$$

On en déduit le retard de phase le long du rayon AI :

$$\varphi_1 - \varphi_A = k(AI) = k \cdot AI$$

en prenant l'indice de l'air égal à 1 et k désignant le vecteur d'onde. Soit :

$$\boxed{\varphi_1 = \varphi_A + k \cdot \left(D + \frac{x^2 + y^2 - 2D \cdot OH}{2D} \right)}$$

(A sert de référence des phases pour le point I).

2) De même qu'à la question précédente, on a :

$$A'J^2 = A'K^2 + KJ^2 \text{ avec } KJ^2 = OJ^2 - OK^2.$$

Utilisons à nouveau l'hypothèse de la faible épaisseur de (L) pour effectuer une deuxième approximation. I et J sont pratiquement équidistants du centre O de la lentille, ce qui conduit à poser :

$$\begin{cases} OJ = OI = x^2 + y^2 \\ OK = OH \end{cases}$$

Ainsi : $A'J^2 = A'K^2 + OJ^2 - OK^2 = (A'K + OK) \cdot (A'K - OK) + OJ^2$

donc : $A'J^2 \approx x^2 + y^2 + D' \cdot (D' - 2OH)$

et finalement : $A'J = D' \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2 - 2D' \cdot OH}{D'^2}} \approx D' + \frac{x^2 + y^2 - 2D' \cdot OH}{2D'}$

On en déduit :

$$\varphi_J = \varphi_A - k \cdot \left(D' + \frac{x^2 + y^2 - 2D' \cdot OH}{2D'} \right)$$

(ici la phase est repérée par rapport à celle du point image A').

3) Introduisons l'indice n de (L). Le rayon lumineux issu de A et dont la direction est celle de l'axe optique pourcourt pour aller jusqu'au point A' le chemin optique :

$$(AA') = (AE) + (EF) + (FA')$$

avec : $(AE) = AE = D - \frac{e}{2}$, $(FA') = FA' = D' - \frac{e}{2}$ et $(EF) = n \cdot e$. Donc :

$$(AA') = D + D' + (n - 1) \cdot e$$

La différence de phase s'écrit donc :

$$\varphi_A - \varphi_A = k \cdot (AA') = k [D + D' + (n - 1) \cdot e] \quad (1)$$

4) En question précédente, nous avons obtenu une première expression de la différence de phase introduite par (L) entre l'objet et son image. Cependant, une seconde expression peut être déduite à partir des questions 1) et 2) :

$$\varphi_{A'} - \varphi_A = \varphi_A - \varphi_J + \varphi_J - \varphi_I + \varphi_I - \varphi_A$$

soit : $\varphi_{A'} - \varphi_A = k \cdot \left(D' + \frac{x^2 + y^2 - 2D' \cdot OH}{2D'} \right) + \varphi_J - \varphi_I + k \cdot \left(D + \frac{x^2 + y^2 - 2D \cdot OH}{2D} \right) \quad (2)$

En égalant (1) et (2), il vient :

$$k [D + D' + (n - 1) \cdot e] = k \cdot \left(D' + \frac{x^2 + y^2 - 2D' \cdot OH}{2D'} \right) + \varphi_J - \varphi_I + k \cdot \left(D + \frac{x^2 + y^2 - 2D \cdot OH}{2D} \right)$$

Soit après simplification :

$$\varphi_J - \varphi_I = k \cdot \left[\frac{-(x^2 + y^2) \left(\frac{1}{D} + \frac{1}{D'} \right)}{2} + 2 \cdot OH + (n - 1) \cdot e \right]$$

avec : $\frac{1}{D} + \frac{1}{D'} = \frac{1}{f'}$ (relation de conjugaison de (L) au centre, $\overline{OA} = -D$ et $\overline{OA'} = D'$).

$$2OH = e \text{ (hypothèse préalablement utilisée).}$$

Donc :

$$\varphi_J - \varphi_I = -k \cdot \left[\frac{x^2 + y^2}{2f'} - n \cdot e \right]$$

Commentaires

(L) est à l'origine d'un déphasage entre l'onde incidente et l'onde transmise qui dépend du rayon lumineux considéré, c'est-à-dire du point I(x, y).

Nous retrouverons ce type de comportement dans le chapitre 6 consacré à la diffraction : (L) se comporte comme une pupille diffractante.

Enfin, on constate que si (L) est parfaitement transparente, l'amplitude de l'onde est inchangée, seule la phase de l'onde est modifiée (ce qui modifie la surface d'onde après traversée de (L)).

Généralités sur les interférences lumineuses à deux ondes

Introduction

Dans quelles conditions des interférences peuvent-elles exister dans le cas particulier de la superposition de deux ondes lumineuses? Quel modèle faut-il adopter pour la lumière afin de rendre compte de ces phénomènes? Comment caractériser physiquement le phénomène lumineux associé aux interférences à deux ondes? Quels dispositifs optiques sont capables de montrer ces interférences? Quelles sont leurs limites, celles des sources qui les éclairent et celles des détecteurs qui mettent en évidence ces interférences? Répondre à ces questions constitue l'objet de ce chapitre.

Plan du chapitre 2

A. L'expérience de Young	42
B. Le principe de superposition	43
C. Conditions d'interférence de deux ondes	43
D. Le modèle scalaire de la lumière	49
E. Relations et notions fondamentales concernant les interférences à deux ondes ..	50
F. Conclusion	54
Méthodes	
L'essentiel; mise en œuvre	55
Énoncés des exercices	63
Indications	65
Solutions des exercices	66

1. Thomas Young (1773-1829), connu pour ses qualités multiples, médecin, botaniste, linguiste... possédait de solides notions de physique, notamment en acoustique. La connaissance de ce domaine, éminemment ondulatoire, joint au travail de ses devanciers, notamment Huygens, un pilier de la théorie ondulatoire, ainsi que la remise en question respectueuse des idées émises un siècle plus tôt par Newton, très mécaniste dans son analyse, permirent à T. Young de découvrir les interférences lumineuses.

2. Dans l'expérience historique, Young utilise la lumière blanche issue directement du Soleil, donc polychromatique.

3. Pour des questions de représentation, les échelles ne sont pas respectées et il faut bien noter que le phénomène lumineux observé se développe uniquement au voisinage de O. Par exemple, dans l'expérience proposée, en lumière monochromatique ($\lambda = 555 \text{ nm}$), pour des trous S_1 et S_2 de 1 mm de diamètre, et une distance $D = 1 \text{ m}$ de E_2 à E_3 , le phénomène représenté sur l'écran E_3 de la figure 1, s'observe de part et d'autre de O sur une distance d'environ 8 mm.



Fig. 2 – Observation d'anneaux concentriques et de franges alternativement sombres et claires sur l'écran.

4. Comme nous le verrons, la mesure de paramètres facilement accessibles comme la distance du plan des sources S_1 et S_2 à l'écran, la distance entre les sources S_1 et S_2 , ainsi que la distance entre deux franges rectilignes de même nature (sombre ou claire) permet de calculer la longueur d'onde monochromatique de la lumière qui éclaire le dispositif.

A. L'expérience de Young

Thomas Young¹ a découvert les interférences lumineuses dans une expérience que l'on peut reproduire de la manière suivante:

• Montage expérimental

Une lumière parallèle et monochromatique² éclaire un premier écran E_1 percé d'un trou d'épingle S (figure 1).

Issue de S , la lumière éclaire un second écran E_2 percé de deux trous d'épingle S_1 et S_2 très proches l'un de l'autre tels que $SS_1 \approx SS_2$.

Un troisième écran E_3 , supposé être ici un écran translucide, permet d'observer par transmission le phénomène recueilli à sa surface.

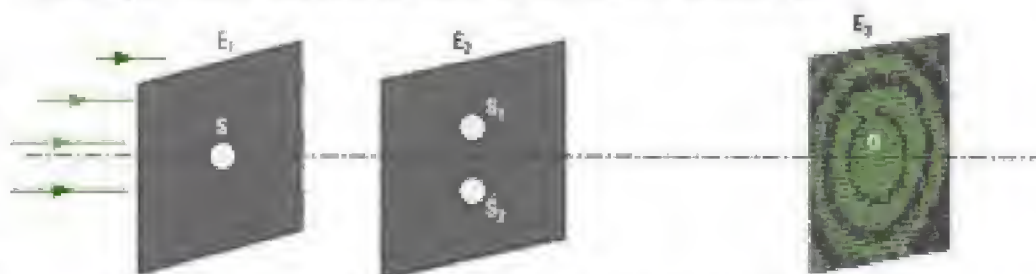


Fig. 1 – Expérience des trous de Young dans une version moderne utilisant une lumière monochromatique³.

• Observations et interprétation

Nous observons sur l'écran E_3 , au voisinage du point d'intersection O de l'axe du système et de cet écran, un phénomène lumineux, dont les figures 1 et 2 donnent une reproduction. Ce phénomène lumineux se compose:

- de zones circulaires alternativement sombres et claires dues à la diffraction;
- de bandes sombres et claires dues aux interférences qui barrent, ici horizontalement, les zones circulaires précédentes.

Ceci a permis à T. Young d'énoncer le principe suivant en 1802:

« Lorsque deux vibrations de provenances différentes coïncident exactement ou ont des directions très proches, leur effet conjugué est une combinaison propre à chacune d'elles ».

Nous disons alors que:

- les deux ondes issues de S_1 et S_2 interfèrent;
- la figure observée formée de bandes rectilignes est une figure d'interférences;
- la zone de l'espace où les ondes se superposent est le champ d'interférence.

Définition 1

Lorsque plusieurs ondes se superposent en un point, sous des conditions que nous expliciterons, le phénomène qui module l'éclairement dans l'espace rendant l'éclairement différent de la simple somme des éclairements dus à chaque source, est appelé **phénomène d'interférences**.

L'expérience menée par Young en 1801 a été déterminante.

D'une part, elle confirmait la validité du modèle ondulatoire de la lumière, d'autre part, elle a permis des mesures de longueur d'onde⁴: Young détermina ainsi les longueurs d'onde limite du spectre visible, 400 nm pour le bleu et 800 nm pour le rouge. Enfin, ces observations incitaient à une recherche théorique sur les sujets de la diffraction et des interférences. C'est Augustin Fresnel (1788-1827) qui rendra compte de tous les phénomènes ondulatoires de la lumière alors connus (interférences et diffraction).

Comme nous l'avons remarqué, les phénomènes d'interférences et de diffraction sont souvent présents simultanément, ce qui rend l'étude compliquée. Dans la suite de ce cours, nous nous intéresserons en premier aux interférences, puis ensuite au phénomène de diffraction. Cependant, comme on l'a vu, le phénomène de diffraction module le phénomène d'interférences : aussi, lors de l'étude des interférences, nous nous bornerons seulement à signaler le phénomène de diffraction lorsque nous l'observerons.

B. Le principe de superposition

L'expérience de Young nous a montré que les interférences lumineuses résultent de la superposition de deux lumières, en fait de deux ondes électromagnétiques, avec le caractère particulier suivant : l'intensité lumineuse en un point n'est pas la somme des intensités des deux lumières en ce point¹.

Les grandeurs qui s'ajoutent en tout point, et à chaque instant, sont en fait les vibrations lumineuses auxquelles nous avons associé le vecteur champ électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$ dans le chapitre 1.

Le principe de superposition que nous énonçons maintenant est contenu dans la propriété de linéarité de l'équation de d'Alembert et est général aux ondes, qu'elles soient décrites par une grandeur vectorielle ou scalaire².

Propriété 1

Si en un point de l'espace, une onde lumineuse, associée au champ électrique $\vec{E}_1(\vec{r}, t)$, rencontre une onde lumineuse, associée au champ électrique $\vec{E}_2(\vec{r}, t)$, alors l'onde résultante est décrite en ce point par le champ :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_1(\vec{r}, t) + \vec{E}_2(\vec{r}, t).$$

La relation non linéaire qui existe entre l'intensité lumineuse en un point et l'amplitude du champ électrique en ce point montre que :

$$I(\vec{r}) \neq I_1(\vec{r}) + I_2(\vec{r}).$$

S'il y a interférences, la somme des intensités lumineuses (ou éclairéments) dues à chacune des sources, en un point, n'est pas l'éclairement réellement observé³.

C. Conditions d'interférence de deux ondes

Nous allons calculer l'intensité lumineuse due à la superposition de deux ondes en un même point M, issues de deux sources S_1 et S_2 , et nous dégagerons les conditions dans lesquelles ces deux ondes peuvent interférer.

C.1. Terme d'interférences

• Hypothèses

Considérons deux ondes lumineuses, monochromatiques, se propageant dans un milieu d'indice $n = 1$ ⁴, de pulsations ou fréquences différentes ($\omega_1 \neq \omega_2$), chacune polarisée rectilignement selon des directions différentes repérées par les vecteurs unitaires \vec{e}_{p_1} et \vec{e}_{p_2} , avec $\vec{e}_{p_1} \neq \vec{e}_{p_2}$, soit en notation complexe :

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \underline{E}_{1m} \vec{e}_{p_1} \exp(j\omega_1 t) \text{ et } \vec{E}_2(\vec{r}, t) = \underline{E}_{2m} \vec{e}_{p_2} \exp(j\omega_2 t)$$

avec $\underline{E}_{1m} = E_{1m} \exp(-j\varphi_1(M))$ et $\underline{E}_{2m} = E_{2m} \exp(-j\varphi_2(M))$

1. Cette surprenante révélation selon laquelle lumière + lumière = obscurité a historiquement été nommée « paradoxe des interférences ».

2. Nous pourrions donc faire jouer à plein ce principe de superposition, issu de la notion de linéarité de l'équation de d'Alembert, en utilisant les séries de Fourier, ou la transformée de Fourier, pour traiter d'autres signaux lumineux que les signaux lumineux harmoniques.

3. Les équations de milieu ne sont pas, elles, forcément linéaires. Le champ électrique interatomique E est de l'ordre de $10^{11} \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$. Aussi, un champ électrique perturbateur de l'ordre de $10^3 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$, de l'ordre de celui que l'on utilise en optique courante, est négligeable vis-à-vis du champ interatomique. En conséquence, ce champ crée dans le milieu un moment dipolaire à dépendance linéaire en E . Nous considérerons dans la suite de cet ouvrage que la réponse du milieu est linéaire, ou que suffit le développement à l'ordre 1 par rapport à E . Il n'en est plus de même lorsque le champ perturbateur est créé par un laser dont la puissance atteint quelques kilowatts : le champ est alors de l'ordre de $10^6 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$ et le moment dipolaire devient non linéaire en E .

4. Ce choix ne restreint pas la portée de l'étude, mais en facilite l'écriture.

où $\varphi_1(M)$ et $\varphi_2(M)$ sont les retards de phase des vibrations au point M de l'espace repéré par le rayon vecteur \vec{r} .

Au point M , se trouve un détecteur d'intensité lumineuse I ou un écran.

• Utilisation du principe de superposition

En appliquant le principe de superposition des ondes, nous obtenons le champ résultant $\vec{E}(\vec{r}, t)$ en M , soit :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = E_{1m} \vec{e}_\rho \exp(j\omega_1 t) + E_{2m} \vec{e}_\rho \exp(j\omega_2 t).$$

• Calcul de l'intensité lumineuse

L'intensité, telle que définie dans le chapitre 1, est égale à la valeur moyenne du carré de la norme du champ électrique¹. En notation complexe, nous avons :

$$I = \langle \vec{E} \cdot \vec{E}^* \rangle_t = \langle (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^* \rangle_t = \langle \vec{E}_1^2 + \vec{E}_2^2 + \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2^* + \vec{E}_1^* \cdot \vec{E}_2 \rangle_t.$$

$$\text{Or, } I_1 = \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_1^* \rangle_t = E_{1m}^2 \text{ et } I_2 = \langle \vec{E}_2 \cdot \vec{E}_2^* \rangle_t = E_{2m}^2.$$

Comme $\underline{z} + \underline{z}^* = 2\Re(\underline{z})$, alors :

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2^* + \vec{E}_1^* \cdot \vec{E}_2 = 2\Re(\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2^*).$$

L'intensité s'écrit donc sous sa forme la plus générale selon :

$$I = I_1 + I_2 + 2\Re\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2^* \rangle_t.$$

Dans le cas particulier des ondes harmoniques, l'intensité s'écrit alors :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_2(M) - \varphi_1(M)] (\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\rho) \rangle_t,$$

$$\text{car } 2\Re\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2^* \rangle_t = 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_2(M) - \varphi_1(M)] (\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\rho) \rangle_t.$$

• Terme d'interférences

Définition 2

Le terme $2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_2(M) - \varphi_1(M)] (\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\rho) \rangle_t$, qui représente l'écart à la simple addition des intensités au point de l'espace où les deux ondes se superposent, est le **terme d'interférences**².

C'est le terme qui analytiquement est à l'origine du phénomène d'interférences. Si pour une raison quelconque ce terme est nul alors, dans la zone de recouvrement des deux faisceaux, l'intensité du phénomène résultant de cette superposition est la somme des intensités de chaque faisceau :

$$I = I_1 + I_2.$$

Propriété 2

Si le terme d'interférences est nul en un point, l'éclairement en ce point est uniforme et il n'y a pas d'interférences observables.

C.2. Conditions pour obtenir des interférences

Définition 3

Il y a interférences si le terme d'interférences est **non nul** :

$$2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_2(M) - \varphi_1(M)] (\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\rho) \rangle_t \neq 0.$$

Définition 4

Deux ondes (corrélées) sont dites **cohérentes entre elles** si elles peuvent donner lieu à un phénomène d'interférences.

1. L'utilisation de la moyenne temporelle, notée $\langle \rangle_t$, est due au temps de réponse du détecteur (cf. chapitre I).

2. Le terme $\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2^* \rangle_t$ est aussi appelé fonction de cohérence mutuelle.

C.2.1 – Condition de polarisation des ondes

Pour que le terme d'interférences soit non nul, la moyenne $\langle \vec{e}_{p_1} \cdot \vec{e}_{p_2} \rangle_t$ doit être non nulle. Ainsi, pour que des interférences existent, les vibrations lumineuses \vec{E}_1 et \vec{E}_2 ne peuvent pas être orthogonales entre elles au point où elles se superposent.

Propriété 3

Pour qu'il y ait interférence en un point M entre deux ondes lumineuses auxquelles sont associées les champs électriques $\vec{E}_1(M)$ et $\vec{E}_2(M)$, il faut que ces deux vibrations ne soient **pas orthogonales** entre elles au point M.

1. Comme nous le verrons dans le chapitre sur la polarisation, l'orientation dans l'espace des vecteurs champs sera réalisée par des systèmes optiques appelés polariseurs.

2. Voir le cours d'électromagnétisme et l'approche du rayonnement dans le cadre du modèle du dipôle oscillant, notamment l'écriture du champ électrique à grande distance.

$\langle \vec{e}_{p_1} \cdot \vec{e}_{p_2} \rangle_t$ est non nulle si les directions des champs électriques¹ font entre elles un angle constant différent de 90° . C'est impossible si S_1 et S_2 sont des sources monoatomiques classiques différentes dont l'émission est aléatoire. Il faut que S_1 et S_2 se comportent comme **une seule et même source S^2** .

C.2.2 – Conditions sur l'ordre de grandeur des distances : l'approximation des grandes distances

Soient deux ondes émises depuis deux points sources S_1 et S_2 dans un milieu homogène, séparées d'une distance a , se comportant comme une seule et même source. En un point M où se superposent les deux ondes, leurs plans de polarisation ont des directions parallèles et les situations de polarisations extrêmes sont les suivantes (figure 3) :

- **premier cas** : les deux ondes sont polarisées dans une direction perpendiculaire au plan S_1S_2M ; les deux vecteurs champ électrique sont colinéaires quel que soit le point M considéré ;
- **deuxième cas** : les deux ondes sont polarisées dans le plan (figure 4) ; dans ce cas, les deux vecteurs champ électrique font entre eux l'angle χ qui existe entre les rayons lumineux arrivant en M.

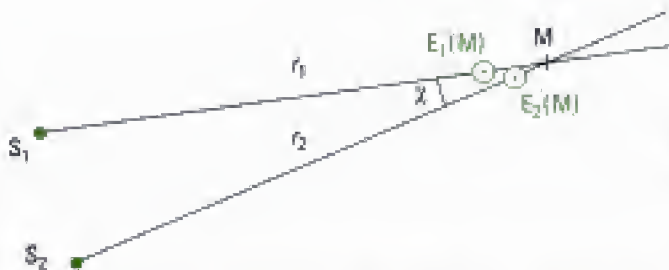


Fig. 3 – Les deux ondes sont polarisées dans une direction perpendiculaire au plan S_1S_2M .

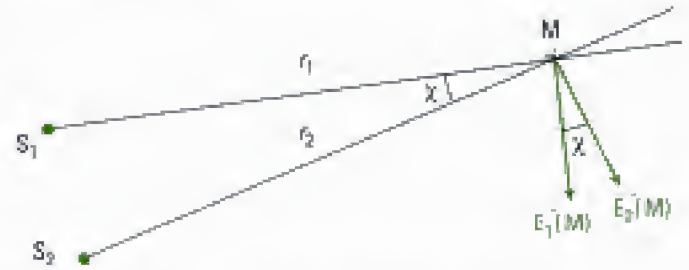


Fig. 4 – Les deux ondes sont polarisées dans le plan S_1S_2M .

Si M est très loin des sources S_1 et S_2 , c'est-à-dire si $r_1 \gg a$ et $r_2 \gg a$, alors les vecteurs $\vec{E}_1(M)$ et $\vec{E}_2(M)$ sont quasiment colinéaires puisque l'angle χ est très petit. Dans ce cas, les autres directions de polarisation des ondes conduisent à une quasi-superposition de leurs directions de polarisation.

3. Le terme $\langle \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + (\varphi_2 - \varphi_1)] \rangle_t$ mesure en fait la corrélation des deux ondes ; si ce terme n'est pas nul, les deux ondes sont corrélées et l'éclairement n'est pas la simple somme des éclairements individuels.

Propriété 4

L'approximation des grandes distances $r_1 \gg a$ et $r_2 \gg a$ réalise la condition : $\vec{e}_{p_1} \cdot \vec{e}_{p_2} = 1$. Nous supposons que les points M du champ d'interférences vérifient cette approximation³.

C.2.3 – Condition d’isochronisme des sources et condition de retard de phase des ondes aux points de l’espace où elles interfèrent

Le terme $2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_2(M) - \varphi_1(M)] \rangle_t$, est non nul si la moyenne temporelle $\langle \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_2(M) - \varphi_1(M)] \rangle_t$ est différente de 0.

Ceci n’est possible que si $(\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_2(M) - \varphi_1(M)$ ne dépend pas du temps.

Le terme d’interférences est **non nul** si : $\omega_1 = \omega_2$

et si : $\varphi_2(M) - \varphi_1(M) = \Delta\varphi(M)$ est une constante indépendante du temps¹.

Propriété 5

Pour obtenir des interférences lumineuses, il est nécessaire que les deux ondes qui se superposent aient **même fréquence**² et que leur déphasage soit **indépendant du temps**³.

1. Ceci à l’échelle du temps de réponse du détecteur.

2. On dit aussi que les ondes sont **isochrones**.

3. La condition de déphasage constant est en pratique valable pour un ensemble de points de l’espace. Ces points ayant le même déphasage auront donc le même état d’interférence.

C.2.4 – Condition de cohérence temporelle des sources

Nous supposons que les deux ondes qui interfèrent loin des sources ont même direction de polarisation et sont isochrones (ainsi $\omega_1 = \omega_2$ ou $\nu_1 = \nu_2$).

Le retard de phase entre les deux ondes qui interfèrent s’exprime en un point M sous la forme :

$$\Delta\varphi(M) = \Delta\varphi_{\text{geo}}(M) + \Delta\varphi_s = \varphi_2(M) - \varphi_1(M)$$

qui contient :

- un terme $\Delta\varphi_{\text{geo}}(M)$ exprimant la différence de retard de phase associée à la différence de marche géométrique, éventuellement augmentée d’un terme de phase constant dû par exemple à une réflexion ;
- un terme $\Delta\varphi_s = \varphi_{s_2} - \varphi_{s_1}$, qui représente la différence des retards de phase à l’émission, c’est-à-dire aux points sources S_1 et S_2 .

Hypothèse : nous supposons ici que le retard de phase d’origine géométrique $\Delta\varphi_{\text{geo}}(M)$ est constant en un point M du champ d’interférences, ce qui est, comme nous le verrons, à la base de la construction des interféromètres.

Or, comme nous l’avons vu au chapitre 1, si S_1 et S_2 sont des sources ponctuelles classiques, ou des sources ponctuelles monoatomiques, le retard de phase $\Delta\varphi_s$ à l’émission est aléatoire.

Dans ce cas, la condition précédente $\varphi_2(M) - \varphi_1(M) = \Delta\varphi(M) = \text{cte}$ n’est plus vérifiée en M, en raison de la nature de l’onde émise par les sources, et il n’y a plus d’interférences en M. L’éclairement dans la zone de recouvrement des deux faisceaux, issus des sources S_1 et S_2 , est alors **uniforme**.

Propriété 6

Si les trains d’ondes issus de S_1 et S_2 qui se superposent en M ont des phases à l’origine aléatoires, il n’y a plus d’interférences.

Pour observer des interférences, il faut que les trains d’ondes qui se superposent en M soient issus d’un même train d’ondes, donc d’une même source S. Ceci étant, $\Delta\varphi_s = \varphi_{s_2} - \varphi_{s_1} = 0$ quelle que soit la date t .

Les trains d’ondes émis par les sources S_1 et S_2 étant issus d’une même source S, il faut aussi que la différence de chemin optique entre les deux trajets suivis par la lumière entre S et M, notée $\delta(M)$, soit plus petite que la longueur de cohérence temporelle L_c de l’onde émise par la source :

$$\delta(M) < L_c$$

1. Si le détecteur est assez rapide pour que l'on puisse observer la superposition pendant la durée d'un train d'ondes, alors nous pouvons observer les interférences puisque, sur la durée de l'observation, la différence de phase due à la source est constante.

Cela concerne par exemple les interférences à deux lasers rendus synchrones par accord. Le temps de cohérence étant long (10^{-4} s par exemple), un photodétecteur à temps de réponse rapide comme un photomultiplicateur (10^{-9} s) détectera un phénomène d'interférences conforme à la relation fondamentale des interférences. Cependant, lors de l'émission suivante, la phase à l'origine change et l'état d'interférence aux points considérés change lui aussi. La répartition spatiale de l'intensité vérifie toujours la relation fondamentale des interférences mais change à chaque nouvelle émission.

2. Sur le dispositif de Young (fig. 1), nous identifions nettement chaque bras.

M étant un point de l'écran, le bras n° 1 correspond au chemin SS_1M et le bras n° 2 au chemin SS_2M .

Les conclusions précédentes sont en fait liées au temps de réponse du détecteur. Vu ce que nous savons de ce temps de réponse, au mieux 10^{-8} s et de la durée de cohérence des sources ordinaires, au mieux 10^{-9} s, les détecteurs moyennent l'intensité et il est donc nécessaire de respecter la condition de cohérence temporelle des sources si l'on veut observer des interférences¹.

C.2.5 – Condition sur le système optique

Les conditions précédentes étant réalisées, l'intensité ne dépend plus que de la position de M par rapport aux sources S_1 et S_2 créées par la division de l'onde issue de la source S.

Pour obtenir des interférences en un point de l'espace, il faut utiliser un système optique qui divise l'onde issue d'une source unique monochromatique en deux ondes qui, après avoir suivi des chemins différents, se superposent dans une région de l'espace appelée champ d'interférences (figure 5). Ce dispositif diviseur d'ondes, appelé interféromètre, doit être tel que la différence de chemin optique entre les deux chemins différents soit inférieure à la longueur de cohérence de la source.

Les vibrations qui se superposent en un point du champ d'interférences ont alors une différence de phase constante en ce point.

Définition 5

Un bras², ou voie, est un des deux chemins suivis par la lumière dans un interféromètre.

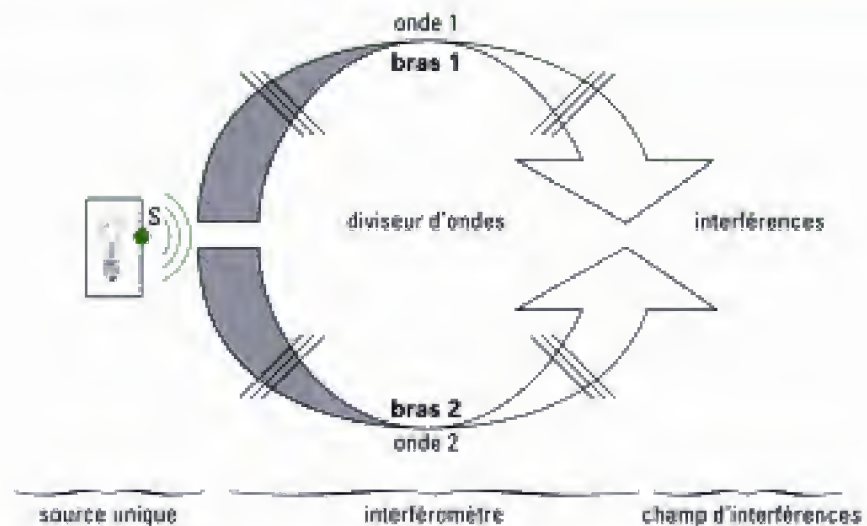


Fig. 5 – Interféromètre ou diviseur d'ondes.

La différence de marche des deux ondes, qui détermine l'état d'interférence d'un point du champ d'interférences, dépend de la propagation des ondes dans chacun des bras. C'est lors du parcours de ces bras que la différence de phase se crée entre les deux ondes.

C.3. Ondes et sources cohérentes

En un point M, deux ondes qui se superposent sont dites cohérentes lorsqu'elles sont issues d'une même source ponctuelle S monochromatique et que la différence de marche $\delta(M)$ est inférieure à la longueur de cohérence L_c de la source. Les deux ondes peuvent alors interférer en M.

1. Dans le cas idéal où $\Delta\varphi_s = \varphi_{S_1} - \varphi_{S_2} = 0$ et $v_1 = v_2$, les sources sont dites synchrones.

Pour obtenir deux sources cohérentes, on réalise deux sources secondaires S_1 et S_2 à partir d'une même source primaire S à l'aide d'un diviseur d'ondes ou interféromètre.

Remarque : nous avons posé $\Delta\varphi_s = \varphi_{S_1} - \varphi_{S_2} = 0^1$. C'est le cas dans l'interféromètre de Young lorsque $(SS_1) = (SS_2)$. Il suffit en fait que $\Delta\varphi_s = \text{cte}$ pour que les interférences soient observables. Dans nombre d'interféromètres, dont celui de Young, les phases des sources S_1 et S_2 sont à l'origine différentes ($\varphi_{S_1} \neq \varphi_{S_2}$) et sont calculables séparément.

C.4. Dispositifs interférentiels

C.4.1 – Interféromètres à division de front d'onde

Dans un interféromètre à division de front d'onde, l'onde issue d'une source primaire S , caractérisée par une amplitude E_m , est divisée spatialement en deux ondes de quasi même amplitude en S_1 et S_2 (figure 6). Ces deux ondes suivent ensuite deux chemins différents pour interférer dans l'espace.

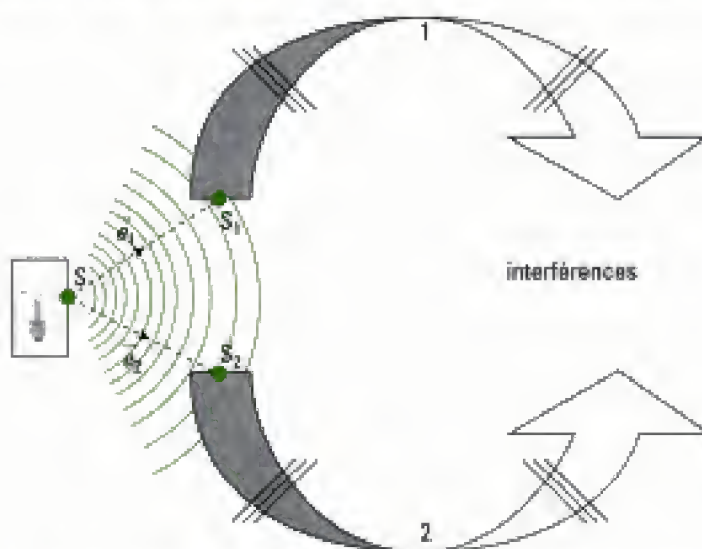


Fig. 6 – Principe d'un interféromètre à division de front d'onde.

La division de front d'onde, ou division spatiale, peut être obtenue grâce à la diffraction (interféromètre de Young) ou grâce à des dispositifs optiques qui créent généralement deux images stigmatiques S_1 et S_2 de la source primaire S (miroirs de Fresnel, biprisme de Fresnel, miroir de Lloyd...).

Dans la région où les ondes interfèrent, celles-ci semblent provenir des deux images S_1 et S_2 de S données par l'interféromètre.

C.4.2 – Interféromètres à division d'amplitude

Dans un interféromètre à division d'amplitude, l'onde issue d'une source primaire S , caractérisée par son amplitude E_m , est divisée en amplitude à l'aide d'une lame semi-transparente (ou semi-réfléchissante) (figure 7).

L'onde réfléchi (réflexion), d'amplitude $E_r = rE_m$, et l'onde transmise (réfraction), d'amplitude $E_t = tE_m$, suivent ensuite deux chemins différents, souvent canalisés par des miroirs, pour interférer dans une région de l'espace.

L'exemple le plus classique d'interféromètre utilisant la division d'amplitude est l'interféromètre de Michelson. Il en existe d'autres : interféromètre de Fabry-Pérot, de Mach et Zender, de Fizeau, de Sagnac, de Jamin, sans oublier les filtres interférentiels, et les bulles de savon.

2. Les coefficients r et t ont été définis au paragraphe F.1. du chapitre 1.

1. Le fait que deux ondes polarisées orthogonalement n'interfèrent pas et que deux ondes de même polarisation interfèrent a été mis en évidence expérimentalement par l'expérience de Fresnel et Arago concernant les interférences en lumière polarisée.

2. Les premières interprétations théoriques concernant l'aspect ondulatoire de la lumière considéraient l'onde associée à la lumière comme longitudinale et le modèle était basé sur celui de la propagation du son dans les fluides. Ce modèle donnait des résultats intéressants mais tombait en défaut lorsque les ondes lumineuses étaient polarisées. Fresnel énonça et montra le caractère vectoriel transverse de la lumière (vecteur de Fresnel) mais bâtit sa théorie de la diffraction sur le modèle scalaire, ce que nous verrons au chapitre sur la diffraction.

3. Selon un usage consacré par l'histoire de l'optique, cette vibration lumineuse, est souvent écrite sous la forme d'un scalaire de la forme :

$s(\mathbf{M}, t) = s(\vec{r}, t) = a \cos(\omega t - \varphi_M)$ que nous avons introduite au chapitre 1. La similitude d'écriture avec la relation $E(\mathbf{M}, t) = E_m \cos(\omega t - \varphi_M)$ est évidente.

Encore une fois, nous n'accédons pas dans les expériences d'interférences à la grandeur vibratoire elle-même, mais plutôt à l'intensité lumineuse en un point. Que cette grandeur s'écrive $s(\mathbf{M}, t)$ ou $E(\mathbf{M}, t)$ ou $\psi(\mathbf{M}, t)$ est donc sans importance.

La notation $\psi(\mathbf{M}, t)$ est proche de la fonction d'onde de la mécanique quantique. Il existe encore d'autres notations...

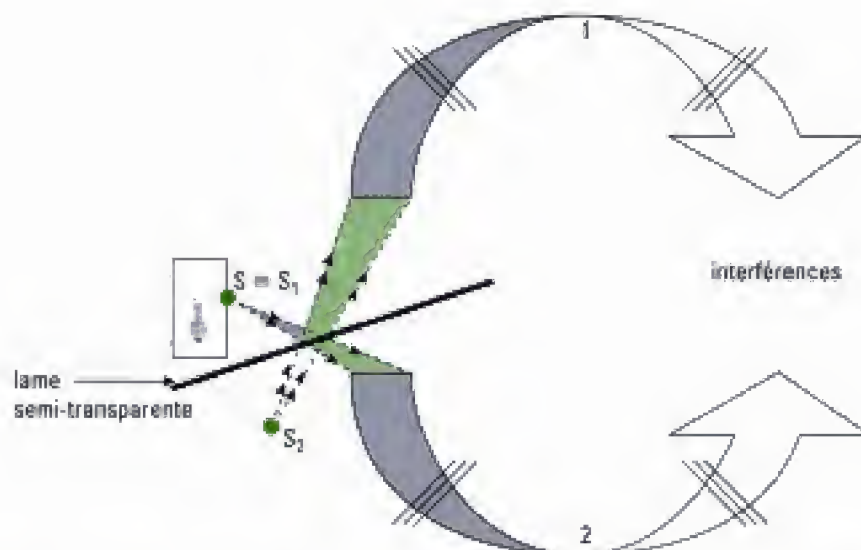


Fig. 7 – Principe d'un interféromètre à division d'amplitude. La lame semi-transparente réfléchit une partie de la lumière et laisse passer l'autre partie.

D. Le modèle scalaire de la lumière

Le phénomène d'interférences n'existe plus lorsque les vecteurs champs électriques des deux ondes qui se superposent sont orthogonaux¹.

Par ailleurs, l'approximation des grandes distances étant vérifiée, les vibrations qui se superposent en un point M du champ d'interférences ont à un instant donné un même état de polarisation. Pendant la durée d'observation, le champ électrique prend toutes les orientations possibles autour de M, dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation.

Aussi, la notion de direction dans l'espace n'est plus déterminante et n'intervient plus dans l'expression de l'intensité. L'addition vectorielle des champs électriques $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ se réduit à chaque instant à une addition de champs scalaires algébriques, sur leur direction commune, ceux-ci étant de nature oscillante et transverse. On parle alors de **modèle scalaire de la lumière**.

Définition 6

Le modèle scalaire de la lumière consiste à considérer qu'en chaque point M où elle agit, la lumière peut être modélisée par une grandeur scalaire dépendant du temps et de l'espace².

Dans le cas de la lumière, cette grandeur scalaire est la valeur algébrique du champ électrique. Dans le cas d'une onde monochromatique de pulsation ω , d'amplitude E_m , ce scalaire, appelé vibration lumineuse, prend en un point M repéré par le vecteur position \vec{r} , à la date t , la forme :

$$E(\mathbf{M}, t) = E(\vec{r}, t) = E_m \cos(\omega t - \varphi(\mathbf{M})).$$

En notation complexe, nous obtenons :

$$E(\mathbf{M}, t) = E_m \exp j(\omega t - \varphi(\mathbf{M}))$$

ou encore :

$$E(\mathbf{M}, t) = \underline{E}_m \exp j(\omega t)$$

en posant $\underline{E}_m = E_m \exp(-j\varphi(\mathbf{M}))$ comme amplitude complexe de la vibration lumineuse³.

E. Relations et notions fondamentales concernant les interférences à deux ondes

Nous utilisons le modèle scalaire de l'onde lumineuse et nous établissons les caractéristiques des interférences, indépendantes du type d'interféromètre.

E.1. Intensité lumineuse dans le champ d'interférences

L'intensité lumineuse en un point M du champ d'interférences où deux ondes se superposent s'écrit :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)).$$

Application 1 Expression de l'intensité lumineuse en un point

Retrouver l'expression de l'intensité lumineuse en un point où deux ondes se superposent en utilisant la notation complexe.

Solution

Nous pouvons retrouver cette expression avec la notation scalaire adoptée. D'après le chapitre 1 :

$$I = 2\langle \vec{E}^2 \rangle_t = 2\langle E^2 \rangle_t = \underline{E} \underline{E}^* = \underline{E}_m \underline{E}_m^*.$$

La vibration scalaire résultante, somme des vibrations scalaires dues aux deux ondes, a pour expression en notation complexe :

$$\underline{E}(M, t) = E_{1m} \exp(j(\omega t - \varphi_1(M))) + E_{2m} \exp(j(\omega t - \varphi_2(M)))$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\underline{E}(M, t) = \underline{E}_m \exp(j\omega t) = \underline{E}_1(M, t) + \underline{E}_2(M, t) = (\underline{E}_{1m} + \underline{E}_{2m}) \exp(j\omega t)$$

ce qui donne $\underline{E}_m = \underline{E}_{1m} + \underline{E}_{2m}$ en posant :

$$\underline{E}_{1m} = E_{1m} \exp(-j\varphi_1(M)) \text{ et } \underline{E}_{2m} = E_{2m} \exp(-j\varphi_2(M)).$$

Nous obtenons l'intensité lumineuse en effectuant le produit $\underline{E} \underline{E}^*$ ou le produit $\underline{E}_m \underline{E}_m^*$:

$$I(M) = \underline{E}_m \underline{E}_m^* = E_{1m}^2 + E_{2m}^2 + 2\Re(\underline{E}_{1m} \underline{E}_{2m}^*).$$

Or, $\underline{E}_{1m} \underline{E}_{2m}^* = E_{1m} \exp(-j\varphi_1(M)) E_{2m} \exp(j\varphi_2(M)) = E_{1m} E_{2m} \exp[j(\varphi_2(M) - \varphi_1(M))]$.

En posant $I_1(M) = E_{1m}^2$ et $I_2(M) = E_{2m}^2$ les intensités dues à chaque faisceau agissant seul en M, on obtient finalement :

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2\sqrt{I_1(M) I_2(M)} \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M))$$

soit encore :

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\varphi(M))$$

où $\Delta\varphi(M) = \varphi_2(M) - \varphi_1(M)$ désigne la différence des retards de phases au point M où se superposent les ondes.

Cas particulier : si les deux ondes ont même intensité I_0 en M, soit $I_1(M) = I_2(M) = I_0(M)$, alors l'intensité s'écrit :

$$I(M) = 2I_0 [1 + \cos(\Delta\varphi(M))] = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\Delta\varphi(M)}{2}\right).$$

E.2. Ordre d'interférence en un point du champ d'interférences

Définition 7

En un point M du champ d'interférences, l'ordre d'interférence p est :

$$p(M) = \frac{\Delta\varphi(M)}{2\pi}.$$

E.3. Interférences constructives ou destructives

• Valeur maximale de l'intensité lumineuse

Comme $I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\varphi(M))$, si I_1 et I_2 sont indépendants du point M , l'intensité dans le champ d'interférences atteint sa valeur maximale si $\cos(\Delta\varphi(M)) = 1$, soit pour des différences de retards de phases telles que :

$$\Delta\varphi(M) = 2m\pi, \text{ avec } m \in \mathbb{Z}.$$

Dans ce cas, les vibrations sont en phase et les interférences sont dites totalement constructives (figure 8). Nous avons alors :

$$I_{\max}(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}.$$

L'ordre d'interférence $p(M) = \frac{\Delta\varphi(M)}{2\pi} = \frac{2m\pi}{2\pi} = m$ est un entier.

Propriété 7

Un éclairement maximal correspond à un ordre d'interférence **entier**.

Définition 8

Les interférences sont dites **constructives** si $I(M) > I_1 + I_2$.

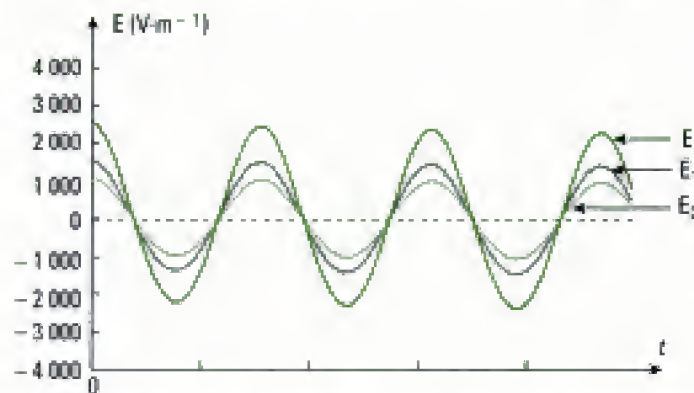


Fig. 8 – Superposition de vibrations en phase en un point M de l'espace où les interférences sont constructives (valeurs indicatives : $E_1 = 1\,500 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$ et $E_2 = 1\,000 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$).

Cas particulier : si $I_1(M) = I_2(M) = I_0(M)$ alors, $I_{\max}(M) = 4I_0$. L'intensité en ces points est alors le double de celle obtenue s'il n'y avait pas d'interférences.

• Valeur minimale de l'intensité lumineuse

L'intensité dans le champ d'interférences atteint sa valeur minimale si $\cos(\Delta\varphi(M)) = -1$, soit pour des différences de retards de phases telles que :

$$\Delta\varphi(M) = (2m + 1)\pi, \text{ avec } m \in \mathbb{Z}.$$

Dans ce cas les vibrations sont en opposition de phase et les interférences sont dites destructives (figure 9). Nous avons alors :

$$I_{\min}(M) = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}.$$

L'ordre d'interférence $p(M) = \frac{\Delta\varphi(M)}{2\pi} = m + \frac{1}{2}$ est demi-entier.

Propriété 8

Un éclairement minimal correspond à un ordre d'interférence **demi-entier**.

1. Un champ électrique de $1\,500 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$, en valeur crête, est celui qui existe dans le pinceau de sortie d'un laser hélium-néon utilisé au laboratoire, de puissance 1 mW, de diamètre 0,65 mm, de divergence 1,2 mrad.

Definition 9

Les interférences sont dites **destructives** si $I(M) < I_1 + I_2$.

Cas particulier : si $I_1(M) = I_2(M) = I_0(M)$, alors $I_{\min}(M) = 0$. Dans ce cas, nous observons dans le champ d'interférences des alternances d'obscurité et de lumière.

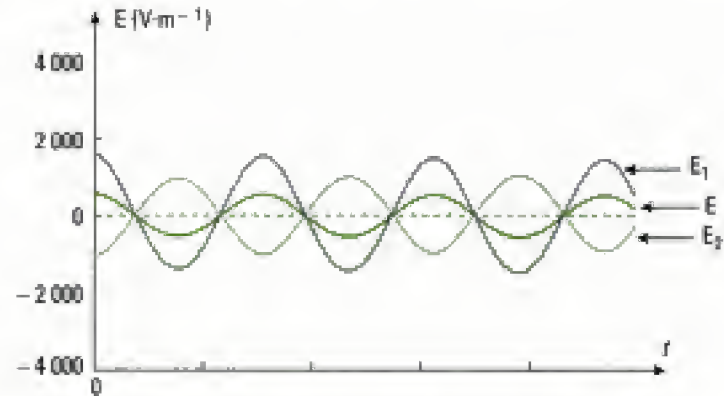


Fig. 9 – Superposition de vibrations en opposition de phase en un point M de l'espace où les interférences sont destructives (valeurs indicatives : $E_1 = 1\,500\text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$ et $E_2 = 1\,000\text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$).

E.4. Surfaces d'égale intensité

En considérant l'expression $I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\phi(M))$, si le module $E_{1,r}$ ou $E_{2,r}$ de l'amplitude complexe des champs varie lentement avec r , ce qui est généralement le cas¹, alors les surfaces d'intensité constante sont définies par $\Delta\phi(M) = \text{cte}$ ou ce qui est équivalent $p(M) = \text{cte}$.

Definition 10

Les surfaces d'égale intensité sont les surfaces telles que :

$$\Delta\phi(M) = \text{cte} \text{ ou encore } p(M) = \text{cte}.$$

E.5. Franges d'interférences

Definition 11

Les **franges d'interférences** sont les intersections des surfaces d'égale intensité avec le plan d'observation, comme par exemple un écran².

E.6. Contraste ou visibilité du phénomène d'interférences

Le phénomène d'interférences est donc marqué par la présence de zones claires, dues aux interférences constructives, et de zones sombres, dues aux interférences destructives. Cependant, comme le montrent les figures 8 et 9, le contraste de ces zones peut être fort variable en fonction de l'amplitude des champs qui se superposent au point M considéré.

Michelson a donné une définition objective de ce contraste C du phénomène d'interférences, que l'on appelle aussi visibilité V :

$$C = V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}.$$

1. Dans le cas particulier de l'onde plane, il n'y a aucune variation de l'amplitude avec r .

2. Ou encore le plan d'une pellicule photographique, le plan observé par un viseur...

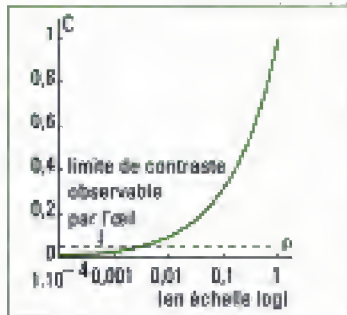


Fig. 10 – Évolution du facteur de contraste C en fonction du rapport ρ des intensités lumineuses délivrées par chaque source :

$$\rho = \frac{I_2}{I_1}$$

Nous avons donc aussi :

$$C = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2},$$

dont la valeur est comprise entre 0 (si $I_1 = 0$ ou $I_2 = 0$) et 1 (si $I_1 = I_2$). Le facteur de contraste évolue rapidement en fonction du rapport entre les intensités lumineuses émises par chaque source (figure 10).

Le cas d'observation des interférences le plus intéressant est donc celui où les intensités, dues à chaque source prise isolément, sont égales.

E.7. Interfrange

Définition 12

L'**interfrange** i est la plus petite distance entre deux points du plan d'observation correspondant à une variation de l'ordre d'interférence de une unité.

Généralement, on mesure cette distance, relative au plan d'observation, entre des surfaces de maximum d'intensité ou de minimum d'intensité.

E.8. Expression de l'intensité lumineuse en fonction de la différence des trajets optiques

Quand deux ondes interfèrent en un même point M du champ d'interférences, elles ont suivi deux chemins optiques (L_1) et (L_2) différents dans un interféromètre. Nous supposons que $\Delta\phi_s = 0$. Il en résulte que ces deux ondes présentent en M , l'une par rapport à l'autre, une différence de chemin optique :

$$\Delta(L(M)) = (L_2) - (L_1)$$

et une différence de retards de phases :

$$\Delta\phi(M) = \phi_2(M) - \phi_1(M).$$

Par convention, la différence de chemins optiques (ou différence de marche) en M est notée $\delta(M)$ ¹. On a donc :

$$\Delta(L(M)) = (L_2) - (L_1) = \delta(M).$$

Selon le cas, nous utiliserons l'une ou l'autre de ces notations dans cet ouvrage. Comme vu au premier chapitre, nous avons aussi :

$$\phi_1(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (L_1) \text{ et } \phi_2(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (L_2).$$

Ainsi,

$$\Delta\phi(M) = \phi_2(M) - \phi_1(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (L_2) - \frac{2\pi}{\lambda_0} (L_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0} ((L_2) - (L_1)) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M)$$

soit :

$$\Delta\phi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M).$$

Dès lors, l'intensité lumineuse en un point M du champ d'interférences $I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\phi(M))$ s'écrit :

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M)\right).$$

Nous sommes donc en présence d'une modulation périodique de l'intensité lumineuse exprimée cette fois en fonction de la différence de chemins optiques.

¹ Cette convention est propre aux opticiens français. Dans les pays anglo-saxons, $\delta(M)$ désigne la différence de retards de phase. Attention donc...

- Si $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M)\right) = 1$, alors $\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M) = 2m\pi$ avec $m \in \mathbb{Z}$ et donc :

$$\delta(M) = m\lambda_0.$$

Nous savons que ce cas correspond au maximum de l'intensité lumineuse pour le point M considéré.

Propriété 9

Les points de maximum d'éclairement, ou franges claires, sont donc ceux pour lesquels la différence de chemin optique est égale à un **nombre entier** de fois la longueur d'onde :

$$\delta(M) = m\lambda_0.$$

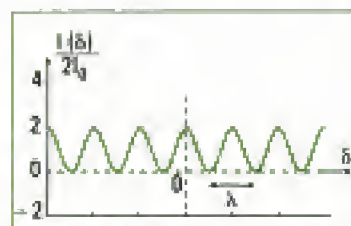


Fig. 11 – Variation de l'intensité lumineuse relative $\frac{I(\delta)}{I_0}$ en fonction de δ .

- Si $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M)\right) = 0$, alors $\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M) = (2m + 1)\pi$ avec $m \in \mathbb{Z}$ et donc :

$$\delta(M) = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_0.$$

Nous savons que ce cas correspond au minimum de l'intensité lumineuse pour le point M considéré.

Propriété 10

Les points de minimum d'éclairement, ou franges sombres, sont donc ceux pour lesquels la différence de chemin optique est égale à un **nombre demi-entier** de fois la longueur d'onde (figure 11).

$$\delta(M) = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_0.$$

F. Conclusion

La notion de source ponctuelle cohérente temporellement est une idéalisation pour ce qui est du domaine temporel. La notion de source très peu étendue spatialement est une autre idéalisation.

Pour étudier les interférences, il faut aussi envisager la notion de cohérence spatiale, c'est-à-dire l'influence de la largeur de la source sur le phénomène d'interférences. Cette question sera abordée aux chapitres 3 et 5.

L'essentiel

✓ Principe de superposition et interférences

• Principe de superposition

Si en un point de l'espace, une onde lumineuse, associée au champ électrique $E_1(\vec{r}, t)$, rencontre une onde lumineuse, associée au champ électrique $E_2(\vec{r}, t)$, alors l'onde résultante est décrite en ce point par le champ électrique :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_1(\vec{r}, t) + \vec{E}_2(\vec{r}, t).$$

• Il y a **interférences** de deux ondes lumineuses si l'éclairement observé en un point n'est pas la simple somme des intensités lumineuses dues à chacune des sources en ce point.

Le terme d'interférence $2\sqrt{I_1 I_2} \left\langle \cos [(\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_2(M) - \varphi_1(M)] (\vec{e}_{p_1} \cdot \vec{e}_{p_2}) \right\rangle_t$ est alors non nul.

✓ Conditions pour obtenir des interférences

• Conditions sur les ondes

Polarisation

Pour qu'il y ait interférences en un point M entre deux ondes lumineuses, il faut que ces deux vibrations ne soient pas orthogonales entre elles au point M. L'approximation des grandes distances $r_1 \gg a$ et $r_2 \gg a$ permet de considérer que les interférences ont lieu entre des ondes de même direction de polarisation.

On observe des interférences si :

– les deux ondes qui se superposent ont même fréquence ou pulsation :

$$\omega_1 = \omega_2 ;$$

– leur déphasage est indépendant du temps :

$$\varphi_2(M) - \varphi_1(M) = \Delta\varphi(M) = \text{cte.}$$

Ces deux ondes sont dites **mutuellement cohérentes**. Deux ondes incohérentes ne peuvent interférer, leurs intensités lumineuses s'additionnent.

Cohérence temporelle

Pour obtenir des interférences, **les trains d'ondes qui se superposent doivent être issus d'une même source S** et la différence de chemin optique $\delta(M)$ entre les deux chemins suivis par la lumière entre S et M doit être plus petite que la longueur de cohérence L_c de l'onde émise par la source :

$$\delta(M) < L_c.$$

• Condition sur le système

Pour obtenir des interférences, le système optique, appelé interféromètre, doit diviser l'onde issue d'une source unique monochromatique en deux ondes et les amener à se superposer ensuite dans une même région de l'espace, appelée champ d'interférences.

✓ Dispositifs interférentiels

• Dans un dispositif interférentiel à division de front d'onde, l'onde issue d'une source primaire S est divisée spatialement en deux ondes qui parcourent ensuite chacune un des bras (ou voie) de l'interféromètre.

• Dans un dispositif interférentiel à division d'amplitude, l'onde issue d'une source primaire S est divisée en amplitude en deux ondes qui parcourent ensuite chacune un des bras (ou voie) de l'interféromètre.

✓ **Modèle scalaire de la lumière**

Dans ce modèle, en chaque point M où elle agit, la lumière peut être représentée par une **grandeur scalaire** dépendante du temps et de l'espace.

✓ **Relations et notions fondamentales**

• **L'ordre d'interférence** en un point M du champ d'interférences est :

$$p(M) = \frac{\Delta\varphi(M)}{2\pi}.$$

• **Intensité lumineuse** dans le champ d'interférences :

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\varphi(M)), \text{ avec } \Delta\varphi(M) = \varphi_2(M) - \varphi_1(M).$$

Lorsque $I_1 = I_2 = I_0$, alors :

$$I(M) = 2I_0[1 + \cos(\Delta\varphi(M))].$$

• **Maximum et minimum d'intensité**

Si $\Delta\varphi(M) = 2m\pi$ avec $m \in \mathbb{Z}$, alors l'intensité est maximale :

$$I_{\max}(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}.$$

Les interférences sont dites **constructives**. L'ordre d'interférence $p(M) = m$ est un entier.

Lorsque $I_1 = I_2 = I_0$, alors $I_{\max}(M) = 4I_0$.

Si $\Delta\varphi(M) = (2m + 1)\pi$ avec $m \in \mathbb{Z}$, alors l'intensité est minimale :

$$I_{\min}(M) = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}.$$

Les interférences sont dites **destructives**. L'ordre d'interférence $p(M) = m + \frac{1}{2}$ est demi-entier.

Lorsque $I_1 = I_2 = I_0$, alors $I_{\min}(M) = 0$.

• **Relation entre la différence de retards de phase et la différence de marche :**

$$\Delta\varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M).$$

• **Les surfaces d'égale intensité** sont les surfaces telles que $\Delta\varphi(M) = \text{cte}$ ou $p(M) = \text{cte}$.

• **Les franges d'interférences** sont les intersections des surfaces d'égale intensité avec un plan d'observation (par exemple un écran).

• **Contraste ou visibilité** du phénomène d'interférences :

$$C = V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}.$$

• **Interfrange**

L'interfrange i est la plus petite distance entre deux points du plan d'observation correspondant à une variation de l'ordre d'interférence de une unité.

– Si $\delta(M) = m\lambda_0$ avec $m \in \mathbb{Z}$, le point correspondant est sur une frange d'intensité lumineuse maximale.

– Si $\delta(M) = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_0$ avec $m \in \mathbb{Z}$, le point correspondant est sur une frange d'intensité lumineuse minimale.

Mise en œuvre

Méthode n°1

Comment représenter le champ d'interférences d'ondes planes pour un système interférentiel donné ?

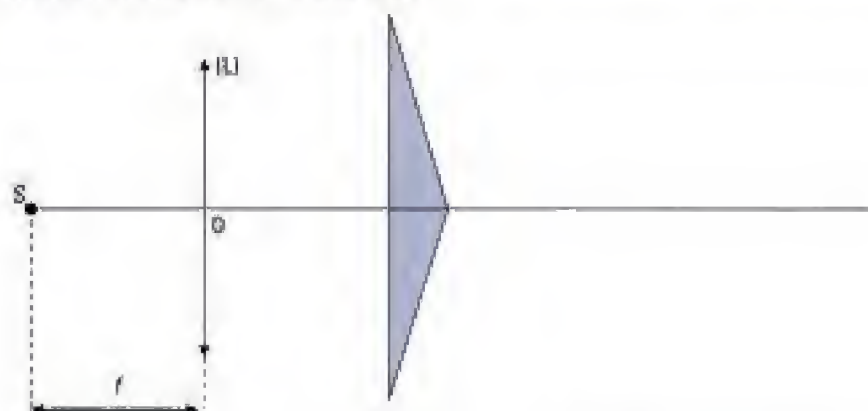
On veut représenter, dans le plan de la figure, la trace de la zone où des ondes planes interfèrent suite à une division de l'onde incidente sur un dispositif interférentiel donné.

→ Savoir faire

- 1 Vérifier que les interférences ont lieu entre ondes planes. En pratique, il s'agit de faisceaux de lumière parallèle.
- 2 Identifier les deux bras de l'interféromètre en présence. Si celui-ci est un miroir, l'onde plane réfléchie semble provenir d'une image virtuelle située à l'infini dans l'espace image du miroir.
- 3 Tracer la marche des faisceaux lumineux limités par les bords des deux bras de l'interféromètre et issus des sources, réelle ou virtuelle, situées à l'infini (il est impossible dans ce cas de définir des sources secondaires S_1 et S_2 comme c'est par exemple le cas dans le dispositif des trous de Young). En pratique, il faut généralement tracer les rayons lumineux qui passent par les bords de l'interféromètre, et faire ensuite apparaître la zone commune aux deux faisceaux qui représente l'intersection du champ d'interférences avec le plan de figure.
- 4 Se questionner sur le contenu physique de la solution obtenue en envisageant les modifications du champ d'interférences si certains paramètres du problème posé sont modifiés.

→ Application

Deux prismes identiques sont accolés par leurs bases et éclairés à l'aide du dispositif suivant, où f désigne la distance focale de la lentille (L) :

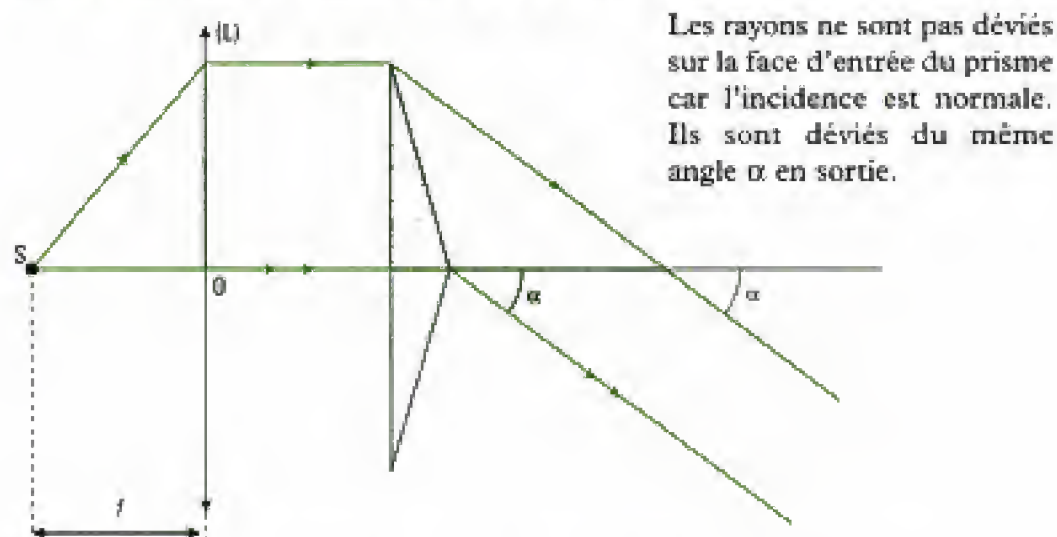


Une source ponctuelle S est placée au foyer objet de la lentille convergente (L). Mettre en évidence la zone d'interférences dans le plan de la figure.

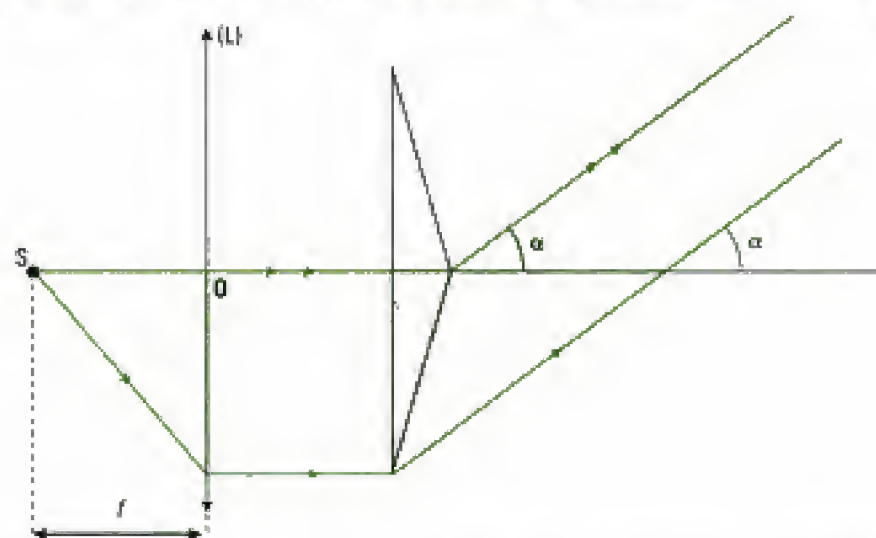
Solution

- 1 Les ondes qui interfèrent sont des ondes planes car la source S est placée au foyer objet de (L) ; celle-ci transmet des ondes planes qui sont dirigées vers les deux prismes accolés.
- 2 L'interféromètre est ici constitué des deux prismes accolés, chaque prisme constituant un des bras de l'interféromètre.

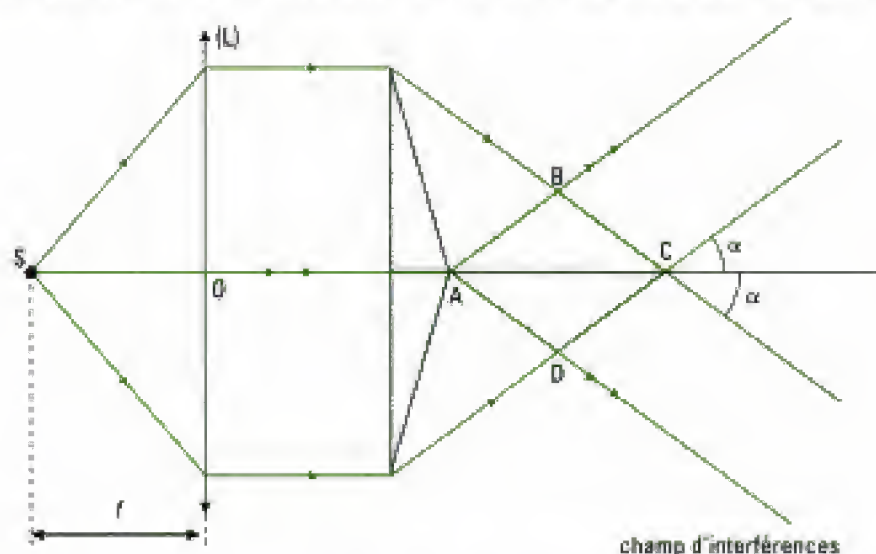
- ③ On commence par tracer le faisceau issu de S et limité par les bords du prisme supérieur :



- On procède de même pour les rayons issus de S et qui traversent l'autre prisme :



- La zone de l'espace (ABCD) où se superposent les deux faisceaux émergents précédents représente l'intersection de la zone d'interférences de ce dispositif avec le plan de figure :



- ④ Discussion sur le contenu physique: si, par exemple, on décide de déplacer la source S en-dehors du plan focal objet de (L), l'onde incidente n'est plus plane.

Méthode n°2

Comment représenter le champ d'interférences d'ondes sphériques pour un système interférentiel donné ?

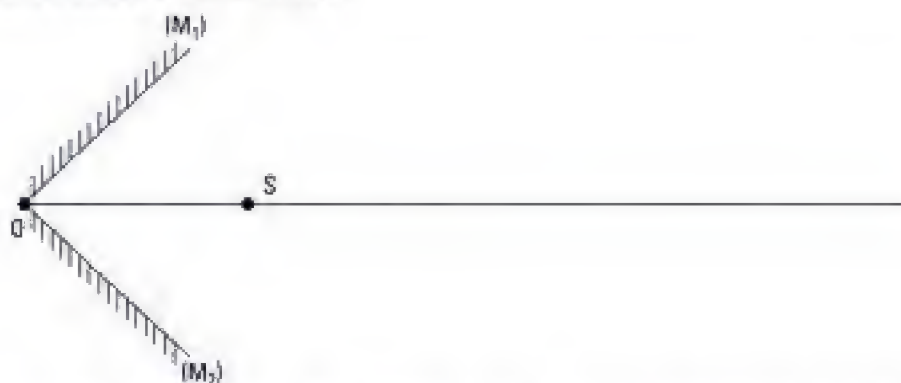
On veut représenter, dans le plan de la figure, la trace de la zone où les ondes sphériques interfèrent suite à une division de l'onde incidente sur un dispositif interférentiel donné.

→ Savoir faire

- ➊ À l'aide d'une construction géométrique, déterminer la ou les sources secondaires S_1 et S_2 correspondant à la source primaire S . Il est possible que dans certains dispositifs interférentiels les sources secondaires soient parfaitement connues dès le départ, comme par exemple dans le cas des trous de Young. Dans d'autres dispositifs, la source primaire réelle interfère avec une source secondaire virtuelle.
- ➋ Tracer la marche des faisceaux lumineux issus des sources secondaires en fonction des caractéristiques du système interférentiel. En pratique, il faut généralement tracer les rayons lumineux issus des sources qui interfèrent et qui passent par les bords de l'interféro-mètre, par exemple les bords d'un miroir. Faire ensuite apparaître la zone commune aux deux faisceaux qui représente l'intersection du champ d'interférences avec le plan de figure.
- ➌ Se questionner sur le contenu physique de la solution obtenue en envisageant des modifications du champ d'interférences si certains paramètres du problème posé sont modifiés.

→ Application

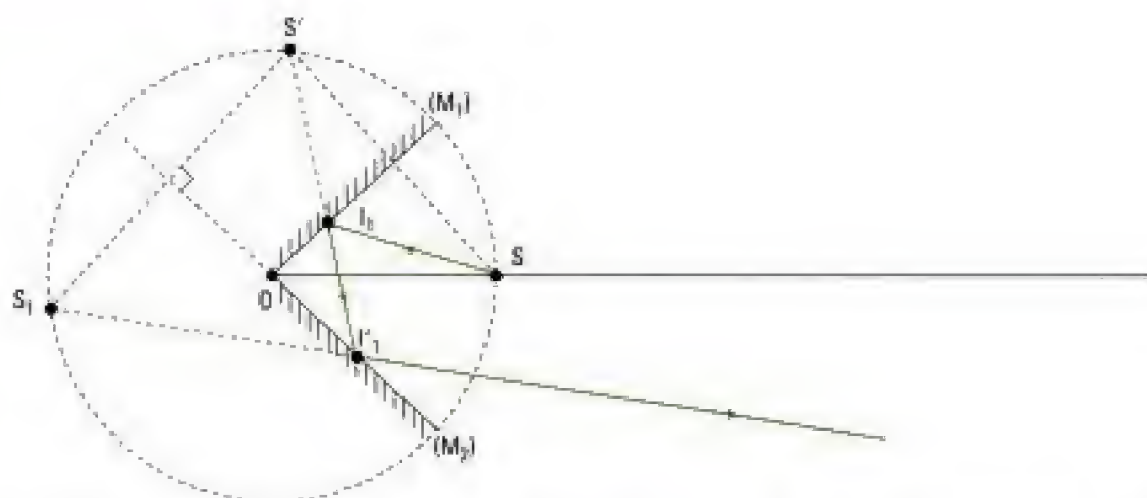
Une source ponctuelle S monochromatique, placée dans le plan bissecteur d'un dièdre réflecteur d'angle légèrement inférieur à $\frac{\pi}{2}$, dont l'arête est perpendiculaire en O au plan de figure, éclaire les faces réfléchissantes de ce dièdre :



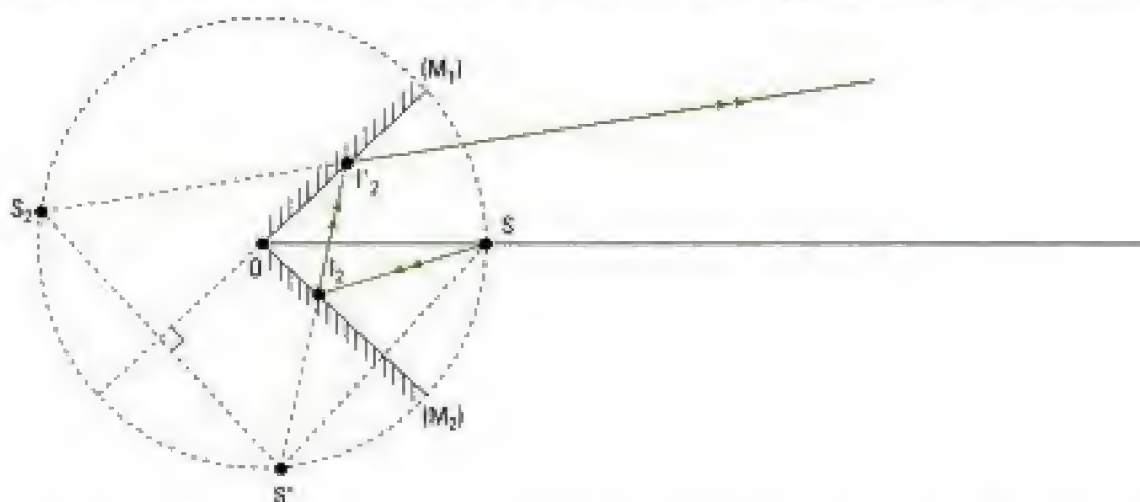
L'angle d'ouverture du faisceau émis depuis S est limité à l'angle sous lequel le dièdre est vu depuis S . On suppose en outre que chaque rayon issu de S se réfléchit successivement sur chacun des deux miroirs, puis ressort du dispositif. On ne tient pas compte des rayons qui se réfléchissent sur un seul des deux miroirs ou qui ne sont pas réfléchis. Mettre en évidence la zone d'interférences alors obtenue dans le plan de la figure.

Solution

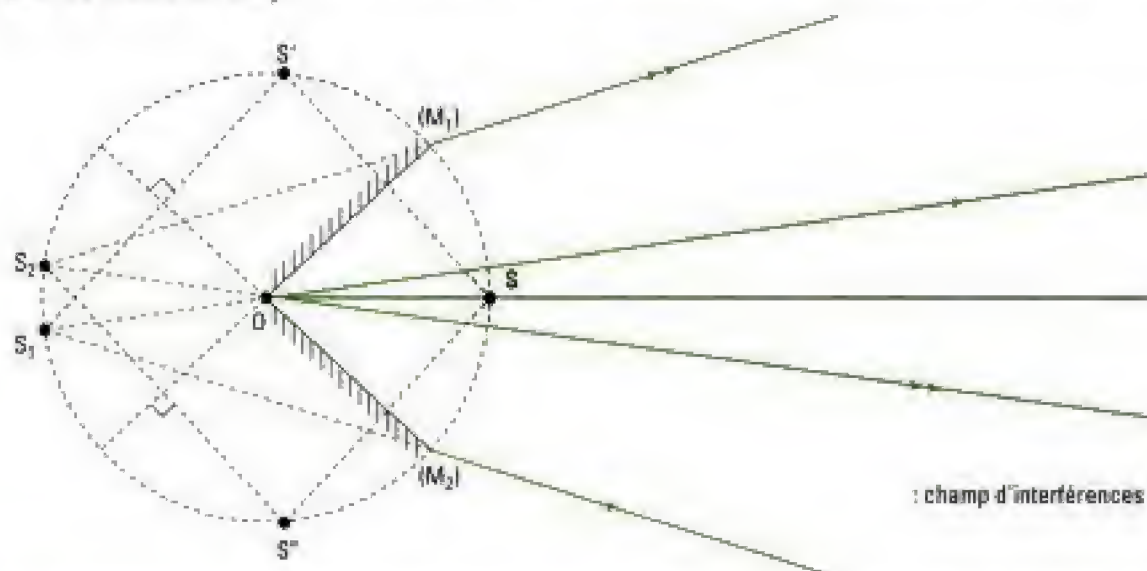
- ➊ Commençons par rechercher la source secondaire S_1 : elle correspond à l'image donnée par réflexion sur (M_1) puis sur (M_2) de la source primaire S . En introduisant l'image intermédiaire S' de S donnée par (M_1) , on construit le rayon réfléchi en I_1 , puis celui qui est réfléchi en I'_1 :



On procède de même pour construire la source secondaire S_2 : elle correspond à l'image donnée par réflexion sur (M_2) puis sur (M_1) de la source primaire S . En introduisant l'image intermédiaire S' de S par (M_1) , on construit le rayon réfléchi en I_1 , puis celui qui est réfléchi en I'_1 :



② On trace la marche des faisceaux lumineux issus des sources S_1 et S_2 . On trace les rayons issus de S_1 et qui passent par les bords du miroir associé à l'émergence, c'est-à-dire celui qui donne lieu à la deuxième réflexion, soit ici (M_2) . De même les rayons lumineux issus de S_2 passent par les bords de (M_1) :



③ Discussion sur le contenu physique : on peut remarquer par exemple que si l'angle entre les deux miroirs tend vers 90° , alors S_1 tend vers S_2 et le champ d'interférences disparaît.

Méthode n°3

Comment déterminer l'interfrange à partir de la différence de marche?

On cherche à déterminer l'interfrange d'une figure d'interférences à partir de l'expression de la différence de marche supposée connue, en distinguant les différents cas possibles rencontrés en pratique.

→ Savoir faire

❶ Identifier le paramètre qui repère dans l'espace la position d'une frange, c'est-à-dire d'une surface d'égal éclairement. En pratique, il peut s'agir d'une coordonnée cartésienne x qui représente l'écartement de la frange considérée à la frange centrale (cas de franges rectilignes et parallèles de position x) ou d'une distance r (cas de franges circulaires de rayon r).

❷ Identifier quelle est la nature de la frange concernée: sombre ou brillante. Si l'énoncé ne précise rien, cela laisse penser que l'interfrange ne dépend *a priori* pas de la nature de la frange.

❸ Utiliser la définition générale de l'interfrange: c'est la distance entre deux points consécutifs du champ d'interférences de même intensité dans le champ. Avec deux cas distincts:

• Premier cas: la différence de marche δ varie linéairement avec le paramètre x qui repère la position des franges. C'est le cas des franges rectilignes et parallèles.

Pour une variation de position Δx égale à i , la différence de marche $\delta(x)$ varie de λ_0 et on écrit:

$$i = \frac{\lambda_0}{\frac{d\delta(x)}{dx}} \quad \left(\text{puisque dans ce cas } \Delta\delta(x) = \frac{d\delta(x)}{dx} \Delta x \right).$$

• Second cas: la différence de marche δ ne varie pas linéairement avec la position de la frange. C'est le cas des franges circulaires pour lesquelles δ est une fonction du carré du rayon r de la frange.

Dans ce cas, la méthode est différente. Il faut d'abord considérer la $m^{\text{ème}}$ frange de rayon r_m à exprimer en fonction de m . On pose à cette fin $\delta = m\lambda_0$ s'il s'agit de trouver l'interfrange

des franges claires ou $\delta = (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2}$ pour celui des franges sombres et on exprime r_m en

fonction de m . Ensuite on déduit de l'expression de r_m celle du rayon r_{m+1} de la $(m + 1)^{\text{ème}}$ frange. Ce qui conduit à l'interfrange i avec: $i = r_{m+1} - r_m$.

→ Application

L'étude d'un dispositif interférentiel conduit à l'expression suivante pour la différence de marche:

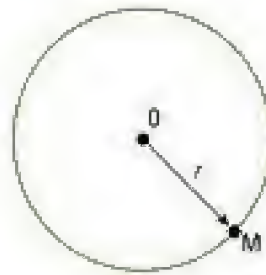
$$\delta = \frac{r^2}{2R} + \frac{\lambda_0}{2}$$

R est une constante pour le dispositif étudié; r mesure la distance au centre O de la figure d'interférences, constante, pour tout point M d'une même frange.

Exprimer l'interfrange i entre deux franges sombres consécutives autour de l'ordre m .

Solution

❶ La distance entre les points M d'une frange et le centre O étant constante, les franges sont circulaires:



② On doit déterminer l'interfrange i entre deux franges sombres consécutives, ainsi il faudra poser $\delta = (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2}$ en étape ①.

③ On commence par exprimer r_m en fonction de m :

$$\delta = (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2} \text{ avec } \delta = \frac{r_m^2}{2R} + \frac{\lambda_0}{2}, \text{ et donc } r_m = \sqrt{m} \sqrt{2\lambda_0 R}.$$

On en déduit l'expression du rayon r_{m+1} de la $(m + 1)^{\text{ème}}$ frange par analogie :

$$r_{m+1} = \sqrt{m + 1} \sqrt{2\lambda_0 R}.$$

Ainsi, l'interfrange i entre deux franges sombres consécutives d'ordres m et $m + 1$ est :

$$i = r_{m+1} - r_m = \sqrt{m + 1} \sqrt{2\lambda_0 R} - \sqrt{m} \sqrt{2\lambda_0 R} = \boxed{\sqrt{2\lambda_0 R} (\sqrt{m + 1} - \sqrt{m})}.$$

Exercices

Niveau 1

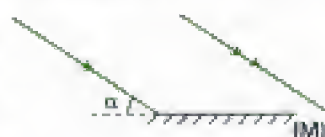
Ex. 1 Questions de cours

- 1) a) Sur l'écran E_1 représenté en figure 2, indiquer ce qui caractérise d'une part le phénomène d'interférences et d'autre part le phénomène de diffraction.
- b) On modifie le dispositif en supprimant E_1 et en plaçant deux lampes de poche devant les trous S_1 et S_2 : qu'observe-t-on alors sur E_1 ?
- 2) Indiquer si le dispositif des trous de Young est à division de front d'onde ou à division d'amplitude ?
- 3) Dans le cas d'interférences à deux ondes de longueur d'onde λ_0 dans le vide, de même intensité I_0 , écrire l'expression de l'intensité I en un point M en introduisant :
 - a) l'ordre d'interférence p ;
 - b) la différence de marche δ .
- c) Que peut-on dire des cas suivants :
 $p = -1,5$; $p = 1,3$ et $\delta = 3\lambda_0$?

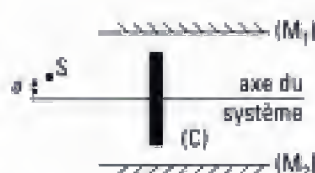
Ex. 2 Champs d'interférences

On demande de représenter dans le plan de figure le champ d'interférences des dispositifs suivants.

- 1) Un faisceau de lumière parallèle, incliné d'un angle α sur l'horizontale, éclaire toute la surface d'un miroir plan (M) horizontal.



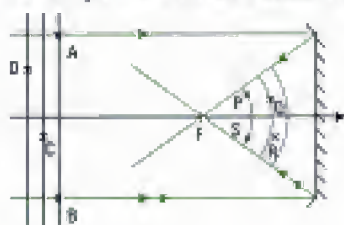
- 2) Deux miroirs plans (M_1) et (M_2) sont parallèles entre eux. Une source ponctuelle S est placée à la distance a de l'axe du système.



Un cache opaque (C) supprime la lumière directe issue de S_1 et S_2 et interdit la possibilité de réflexions multiples sur les deux miroirs.

Ex. 3 Différences de marche

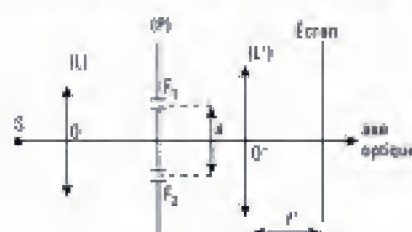
- 1) La figure suivante représente la réflexion d'un faisceau incident de lumière parallèle sur un miroir sphérique concave. À l'instant t , on a également représenté trois surfaces d'onde consécutives avant et après réflexion, qui correspondent à des maximums du champ électrique de l'onde lumineuse :



Le point R est équidistant de deux surfaces d'ondes réfléchies consécutives.

La source est monochromatique. Le milieu de propagation est assimilé à l'air d'indice égal à 1.

- a) Quelle est la nature de l'onde incidente et celle de l'onde réfléchie ?
- b) Quelle est la différence de marche entre le chemin optique (SA) et le chemin (SB) ? Entre les chemins (AP) et (SB) ? (AS) et (AQ) ? (DQ) et (CR) ?
- 2) On considère à présent le dispositif ci-dessous où la source lumineuse S supposée ponctuelle est située au foyer objet d'une lentille convergente (L) :



- a) Tracer deux rayons lumineux issus de S , l'un passant par F_1 et l'autre passant par F_2 , qui émergent de (P) inclinés d'un même angle α par rapport à l'axe optique. Mettre géométriquement en évidence la différence de marche δ entre deux rayons qui convergent en un même point M de l'écran. Exprimer δ en fonction de a et α .
- b) Même question si S est écartée de l'axe optique et vue sous un angle α' depuis O , tout en restant dans le plan focal objet de (L).

Niveau 2

Ex. 4 Figures d'interférences

L'interfrange i dans un dispositif interférentiel, non précisé ici, est défini par la relation :

$$i = \frac{\lambda D}{2a}$$

où D et a sont des paramètres du dispositif. On donne : $\lambda = 546 \text{ nm}$, $D = 70 \text{ cm}$ et $a = 1,5 \text{ mm}$. Sur un écran d'observation, la largeur du champ d'interférences est définie par les positions x telles que :

$$0 \leq x \leq \ell = 0,6 \text{ mm},$$

$x = 0$ repérant un bord de l'écran. On observe une frange noire en $x = 0$.

- a) Calculer la position x de la 3^e frange claire comptée à partir du bord d'écran.
- b) Déterminer le nombre de franges brillantes et noires dans le champ.

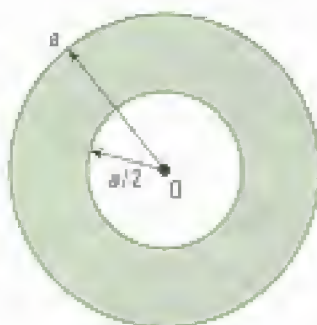
2) Dans un autre dispositif, dans le plan de l'écran d'observation, la zone d'interférences a la forme d'une couronne.

L'ordre d'interférence p en un point M distant de $OM = r$ du centre O, est donné par :

$$p = \frac{d^2 - 2r^2}{8\lambda f'}$$

où d et f' sont des paramètres du dispositif.

On donne : $d = 15 \text{ cm}$;
 $\lambda = 0,6 \mu\text{m}$; $f' = 1 \text{ m}$ et
 $a = 5 \text{ mm}$.

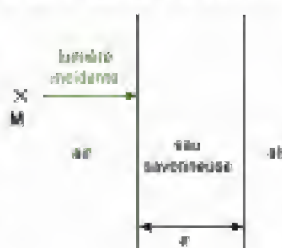


a) Quelle est la forme des franges d'interférences ? Sont-elles équidistantes entre elles ?

b) Donner, pour les franges brillantes, les valeurs numériques possibles de p et celles du paramètre associé caractérisant chacune des franges.

Ex. 5 Réflexion colorée d'une bulle de savon

Une bulle de savon est assimilée localement à une lame à faces parallèles, d'épaisseur e et d'indice $n = 1,33$. La lame est éclairée sous incidence normale et on néglige les ondes issues de la lame après plus de deux réflexions.



1) Exprimer le déphasage $\phi(M)$ existant entre deux ondes réfléchies et qui se superposent en un point M situé en avant de la lame. L'indice de l'air est pris égal à 1.

2) Montrer qu'il existe une condition sur la longueur d'onde λ_0 de l'onde dans le vide pour que la lumière soit réfléchie avec une intensité maximale.

3) Lorsqu'un observateur regarde en hauteur et à la verticale la bulle, celle-ci lui apparaît jaune. Déterminer les valeurs possibles de son épaisseur.

Ex. 6 Différence de marche due à une lame de verre

On place sur le trajet d'un rayon lumineux horizontal une lame de verre inclinée d'un petit angle α par rapport à la verticale. Cette lame est à faces parallèles, d'épaisseur e et d'indice n . Le milieu extérieur est de l'air d'indice égal à 1. L'onde lumineuse est plane.

1) Exprimer la différence de marche introduite par cette lame pour le rayon lumineux qui la traverse.

2) Étudier le cas particulier de l'incidence normale sur la lame.

Niveau 3

Ex. 7 Miroir de Lloyd

On considère le dispositif optique ci-dessous où une fente S très fine et perpendiculaire au plan de figure est placée à une hauteur h du plan horizontal contenant un miroir plan.



On donne : $d = 20 \text{ cm}$ et $\ell = 25 \text{ cm}$.

On prend $h \ll \ell$. (P) est le plan vertical perpendiculaire au bord droit du miroir.

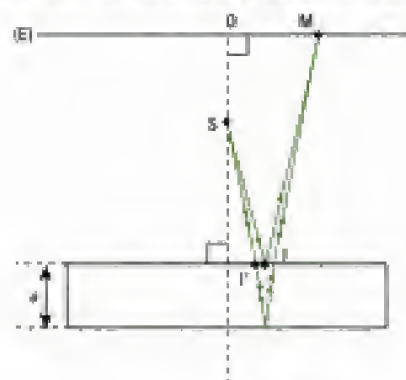
1) Mettre en évidence la zone d'interférences dans le plan (P). Exprimer l'interfrange en fonction des paramètres de l'énoncé.

2) On place une lentille mince convergente ($f' = 10 \text{ cm}$) à $10,5 \text{ cm}$ de (P). On observe sur un écran une image du plan (P) donnée par la lentille. Il s'agit d'une zone d'interférences dont l'interfrange mesure $1,5 \text{ mm}$. Sachant que la fente est éclairée par une source monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0,63 \mu\text{m}$, déterminer h .

Oral, IIE PSI 2000

Ex. 8 Franges de Pohl

Une source ponctuelle S monochromatique, de longueur d'onde λ , est placée dans l'air devant une lame transparente à faces parallèles, d'épaisseur e et d'indice $n > 1$ (lame de mica). On place un écran (E) à l'arrière de S sur lequel on observe des franges d'interférences. On note O le point d'intersection de l'écran (E) avec la normale à la lame passant par S.



Aucune lumière directe issue de S n'atteint (E) grâce à la présence d'un cache opaque (non représenté).

L'écran reçoit des rayons réfléchis sur la face avant de la lame et d'autres réfléchis sur la face arrière.

1) Mettre en évidence la présence de deux sources secondaires S_1 et S_2 (virtuelles) qui interfèrent au point M de l'écran.

2) Que se passe-t-il si on fait tendre le point I vers I' ? Où faut-il alors placer (E) afin d'observer les interférences produites par S₁ et S₂ ? Faire apparaître géométriquement la différence de marche δ entre les rayons issus de S₁ et S₂ qui interfèrent au point M.

3) Pour un rayon issu de S sous l'incidence i , on note r l'angle de réfraction du rayon qui traverse la lame. Exprimer δ en fonction de n , e et r .

4) Quelle est la forme de la figure d'interférences sur (E) ?

Ex. 9 Questions ouvertes

1) Un étudiant effectue un TP sur les interférences données par le dispositif des trous de Young. Après avoir obtenu les franges d'interférences, il souhaite photographier l'écran d'observation grâce à son téléphone portable dernier cri à écran couleur dont il enclenche le flash. En vérifiant immédiatement le résultat de la prise de vue, il constate un éclaircissement

uniformément blanc sans aucune trace des interférences. Expliquer. Quelle était la couleur de l'écran ?

2) On plonge dans de l'eau savonneuse un cadre rectangulaire rigide pour former un film mince et observer à la lumière du jour des franges d'interférences colorées. Décrire l'aspect du film mince.

3) On verse du savon liquide dans un verre rempli d'eau, puis on agite le mélange pour faire apparaître des bulles qui se colorent après quelques secondes. Expliquer pourquoi il faut attendre avant d'observer ces colorations.

Données : il existe une différence de pression Δp entre l'intérieur et l'extérieur de la bulle telle que :

$$\Delta p = p_{\text{int}} - p_{\text{ext}} = \frac{4A}{R}$$

avec : R : rayon de la bulle (m)

A : une constante qui vaut ici $30 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ (cas des interfaces eau savonneuse/air)

Indications

Ex. 3

- 1) Utiliser les propriétés des surfaces d'ondes données au chapitre 1.
- 2) Tracer les deux rayons passant par F₁ ou F₂ puis comparer les chemins optiques avant et après le plan (P).

Ex. 4

- 1) b) Faire un schéma en indiquant la position des franges sur l'écran.

Ex. 5

- 1) Exprimer le déphasage total $(\varphi_M - \varphi_{10})_{\text{tot}}$ entre les ondes issues des deux premières réflexions sur la face avant de la lame.

- 3) Que peut-on dire des radiations dont l'ordre d'interférence diffère d'une unité avec celui qui correspond à une radiation réfléchie de couleur jaune ?

Ex. 6

- 1) Comparer les chemins optiques parcourus par le rayon lumineux avec et sans la lame.

Ex. 7

- 2) Il faut commencer par déterminer la différence de marche en un point M de l'écran repéré par sa position x . M étant peu éloigné du bord de l'écran, il faut effectuer un développement limité.

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1

1) a) **Phénomène d'interférences** : il est à l'origine des **franges rectilignes**, horizontales, alternativement sombres et claires.

Phénomène de diffraction : il est à l'origine des **anneaux concentriques** au centre O de l'écran E_2 , alternativement sombres et clairs.

b) On ne peut plus observer de phénomène d'interférences car S_1 et S_2 ne sont plus cohérentes en ce cas (il s'agit de deux sources lumineuses totalement indépendantes). **L'éclairement de E_2 sera alors uniforme.**

2) Le montage des trous de Young est un **dispositif à division de front d'onde** car la source primaire S est divisée en deux sources secondaires S_1 et S_2 d'amplitudes très voisines.

3) L'intensité lumineuse s'écrit avec les hypothèses de l'énoncé : $I(M) = 2I_0 \cdot [1 + \cos(\Delta\varphi(M))]$.

a) $p(M) = \frac{\Delta\varphi(M)}{2\pi}$, donc :

$$I(M) = 2I_0 \cdot [1 + \cos(2\pi \cdot p(M))].$$

b) $\Delta\varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \delta(M)$, donc :

$$I(M) = 2I_0 \cdot \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \delta(M)\right) \right].$$

c) • Si $p = -1,5$: $\Delta\varphi(M) = -3\pi$ rad et $I(M) = 0$ (l'intensité est minimale si p est demi-entier).

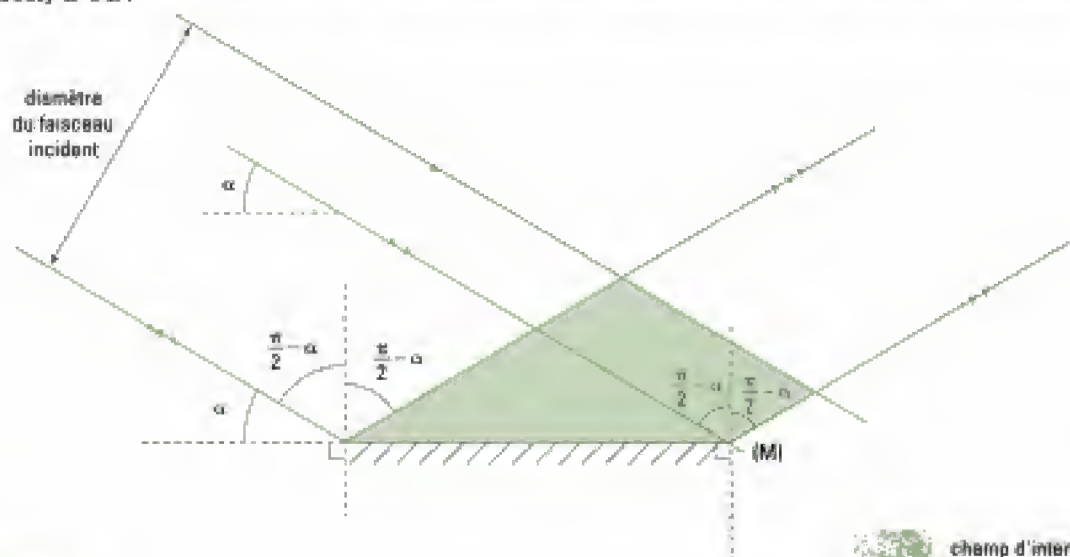
• Si $p = 1,3$: $\Delta\varphi(M) = 2,6\pi$ rad et $I(M) = 0,69I_0$.

• Si $\delta = 3\lambda_0$: $\Delta\varphi(M) = 6\pi$ rad et $I(M) = 4I_0$ (l'intensité est maximale si $\delta = m\lambda_0$, $m \in \mathbb{Z}$).

Exercice 2

On applique la méthode 1 dans cet exercice.

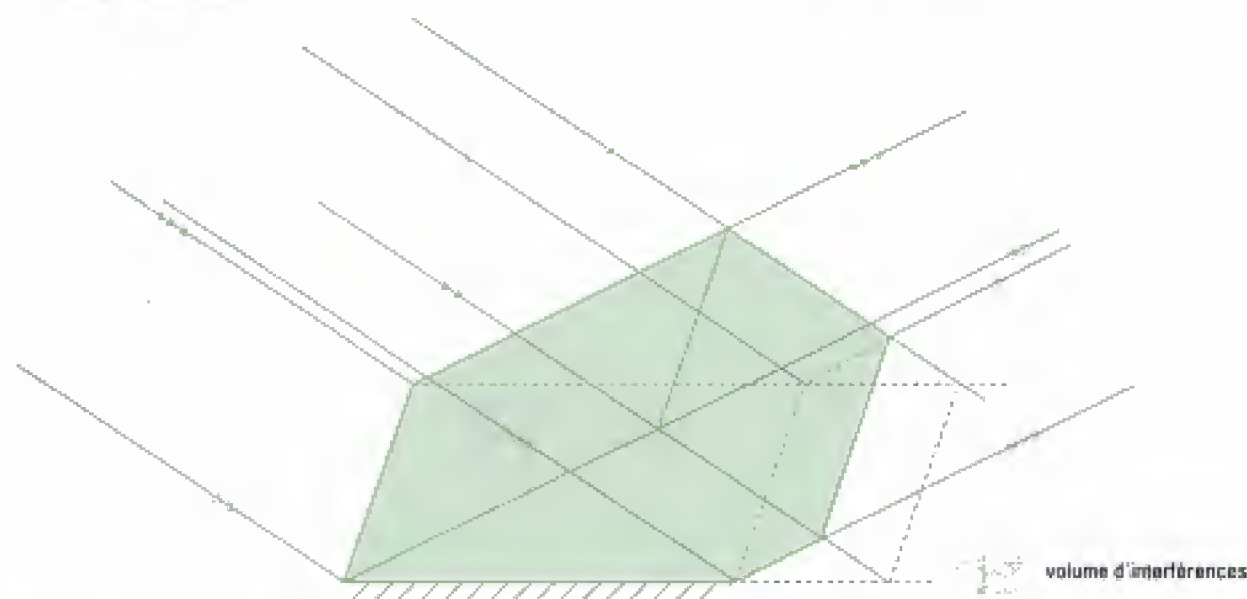
1) L'onde incidente est plane. Le faisceau réfléchi est construit en utilisant la loi de Descartes pour la réflexion, d'où :



champ d'interférences

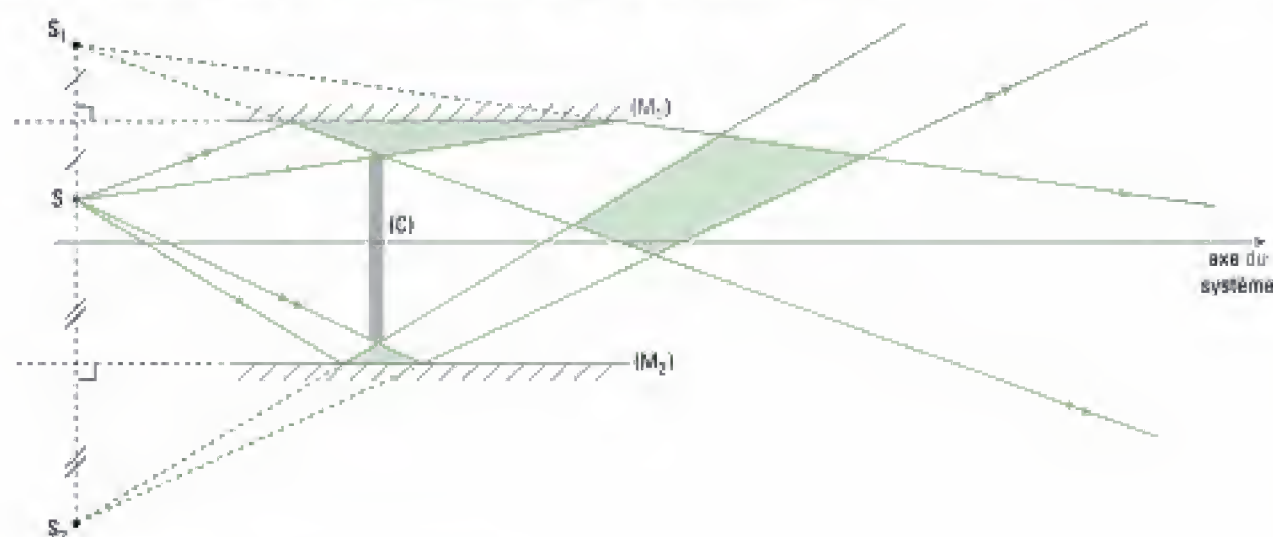


Les représentations usuelles à deux dimensions ne doivent pas nous faire perdre de vue que le phénomène peut s'étendre dans un volume. C'est ici le cas et nous avons ainsi représenté ci-dessous le volume où les interférences ont lieu.



Les interférences sont dites non localisées lorsqu'elles interfèrent dans *toute* la zone où elles se recouvrent.

2) On commence par construire les sources secondaires : S_1 image de S par (M_1) et S_2 image de S par (M_2) . Ensuite on trace les rayons issus de S_1 et S_2 dont le champ est limité soit par un bord de (M_1) et par (C) pour la source S_1 soit par (C) uniquement pour S_2 :



Commentaires

- les interférences sont non localisées ;
- la zone « utile » de cet interféromètre est celle qui ne s'appuie pas sur les miroirs à l'intérieur de laquelle il est possible de placer par exemple un écran d'observation.

Exercice 3

- 1) a) • Les surfaces d'onde de l'onde incidente sont des plans : cette onde est donc **plane**.
 • Comme nous le savons, les rayons issus de la réflexion sur le miroir convergent au foyer F (voir le cours de 1^{re} année).
 Les surfaces d'onde de l'onde réfléchie sont sphériques : l'onde est donc **sphérique**.

b) • Calcul de $\delta_1 = (SA) - (SB)$

La définition d'une surface d'onde (voir chapitre 1) conduit immédiatement à :

$$\delta_1 = 0.$$

• Calcul de $\delta_2 = (AP) - (SB)$

Les points A et B appartiennent à une même surface d'onde, les points P et S à une autre et même surface d'onde. Les chemins optiques (AP) et $(BS) = (SB)$ sont donc égaux, d'où :

$$\delta_2 = 0.$$

⚠ Ce résultat est vrai y compris si un déphasage supplémentaire de π est dû à la réflexion sur le miroir car chaque chemin passe par une réflexion sur le miroir.

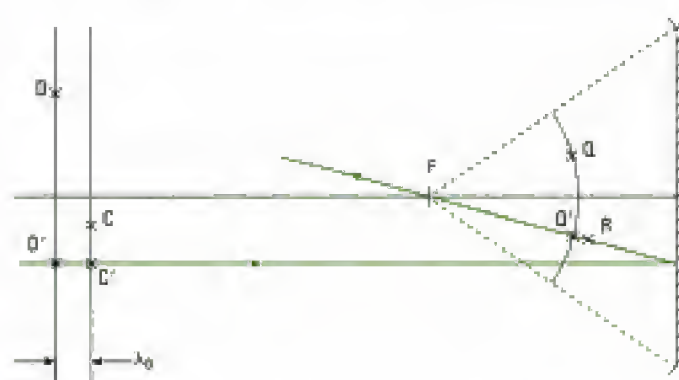
• Calcul de $\delta_3 = (AS) - (AQ)$

Les points S et Q sont situés sur deux surfaces d'onde consécutives, de même état vibratoire (ici un maximum du champ électrique de l'onde lumineuse réfléchie). Ces surfaces sont donc espacées d'une longueur d'onde λ_0 et :

$$\delta_3 = \lambda_0.$$

• Calcul de $\delta_4 = (DQ) - (CR)$

R étant équidistant de deux surfaces d'onde consécutives, il se situe à une distance égale à $\frac{\lambda_0}{2}$ de celles-ci. Pour exprimer δ_4 , représentons le rayon réfléchi qui passe par le point R :



$$\text{avec: } (D'C') = \lambda_0; (RQ') = (RQ) = \frac{\lambda_0}{2}$$

$$(D'Q') = (DQ)$$

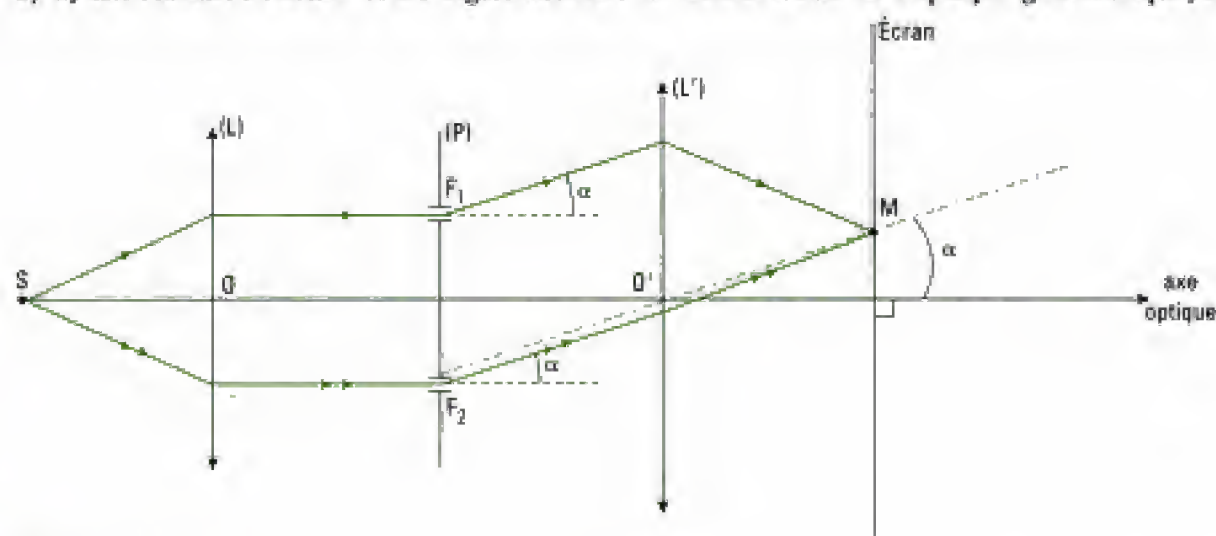
$$(C'R) = (CR)$$

$$\text{et: } (D'Q') = (D'C') + (C'R) + (RQ')$$

$$\text{donc: } (DQ) = \lambda_0 + (CR) + \frac{\lambda_0}{2}$$

$$\text{soit: } \delta_4 = 1,5\lambda_0$$

2) a) En suivant l'énoncé et les règles usuelles de construction de l'optique géométrique, il vient :



Analysons la figure précédente :

- il n'y a aucune différence de marche entre les rayons issus de S et passant par le point F_1 ou le point F_2 : $(SF_1) = (SF_2)$;
- il existe une différence de marche δ entre ces deux rayons issus de F_1 et F_2 , diffractés sous le même angle α et convergeant au point M .

Mettons en évidence δ en traçant la perpendiculaire (π) commune aux rayons ① et ② inclinés de l'angle α sur l'axe optique, et passant par F_1 .

On introduit :

- H projeté orthogonal de F_2 sur ② ;
- I point de passage de ① à travers (L') ;
- J point de passage de ② à travers (L') .

Remarquons que (π) est la trace dans le plan de figure du plan d'onde commun aux rayons ① et ②.

La différence de marche au point M s'écrit donc ici, le rayon ① étant pris comme référence des chemins optiques :

$$\delta(M) = (F_2M) - (F_1M) = (F_2H) + (HM) - (F_1M)$$

or (π) étant un plan d'onde, on a :

$$(F_1M) = (HM)$$

donc : $\delta = (F_2H) = F_2H$ avec $F_2H = a \sin \alpha$ dans le triangle rectangle F_1F_2H .

Finalement :

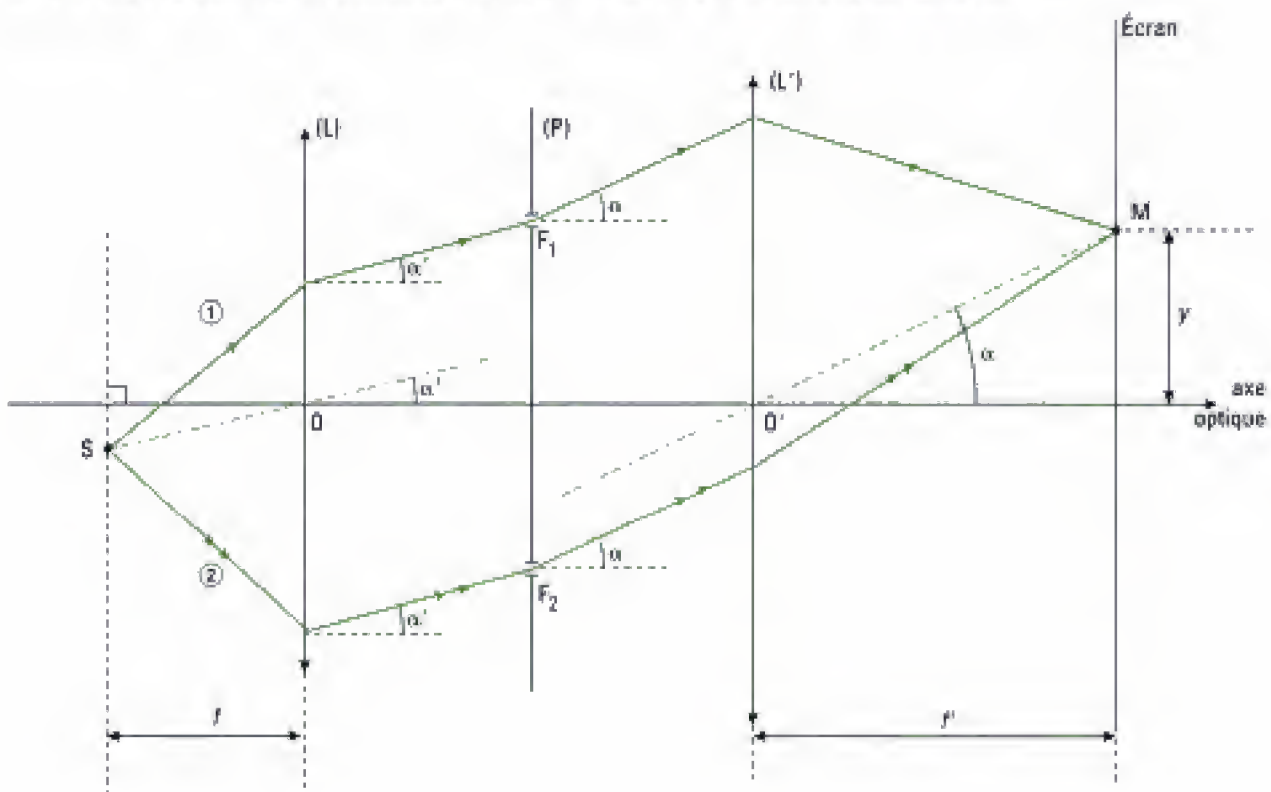
$$\delta = a \sin \alpha.$$



En pratique α étant petit, on a : $\delta \approx a\alpha$.

Le rayon ② est ici en retard sur ① car son trajet est égal à celui de ① augmenté de δ .

b) On commence par représenter le trajet de deux rayons lumineux issus de S :



Analysons la figure précédente :

– la différence de marche entre les rayons ① et ② au-delà de (P) est celle qui a été déterminée à la question précédente, donc :

$$(F_2M) - (F_1M) = a \sin \alpha.$$

– les chemins optiques (SF_1) et (SF_2) ne sont pas égaux contrairement au cas de la première figure. La différence de marche δ' correspondante peut être mise en évidence en faisant apparaître un second plan d'onde (π') .

(π') étant un plan d'onde, on a : $(SH') = (SF_2)$.

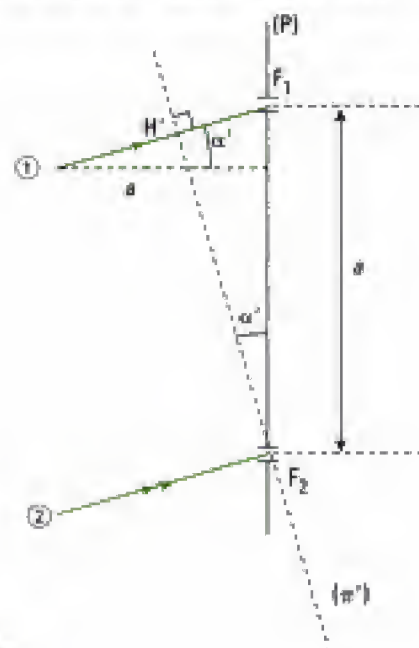
② est ici en avance sur ① car il atteint F_2 avant que ① n'atteigne F_1 . Si on prend le rayon ② comme référence des chemins optiques, alors :

$$\delta' = (H'F_1) = H'F_1 = a \sin \alpha'.$$

Il nous reste à exprimer la différence de marche totale au point M obtenue par addition algébrique de δ et δ' . Par exemple si on prend le rayon ② comme référence, il vient :

$$\delta_{\text{tot}} = \delta' - \delta = a (\sin \alpha' - \sin \alpha).$$

⚠ Nous avons ici choisi de ne pas orienter les angles afin de privilégier une discussion physique sur les termes d'avance ou de retard de phase nécessaire à l'addition des quantités algébriques δ et δ' . Cette démarche est souhaitable dans l'étude des réseaux optiques.



Remarques :

• En introduisant l'ordonnée y du point M sur l'écran, au voisinage de l'axe optique, on a :

$\sin \alpha = \frac{y}{f'}$ et donc $\delta = a \frac{y}{f'}$. Les franges d'interférences définies par $\delta(M) = \delta(y) = \text{cte}$ sont donc rectilignes, parallèles entre elles et perpendiculaires au plan de figure. De plus, on a $\delta = 0$ si $y = 0$: la frange au centre de l'écran (dite « frange centrale ») est brillante car l'intensité lumineuse correspondante $I = 2 I_0 [1 + \cos(k\delta)] = 4 I_0$ est maximale.

• Le déphasage supplémentaire de $\frac{\pi}{2}$ introduit au passage des trous diffractants F_1 et F_2 disparaît dans le résultat final donnant δ_{tot} .

Exercices de niveau 2

Exercice 4

1) a) La 1^{re} frange claire comptée à partir du bord est située à $x = \frac{i}{2}$ puisque la frange est noire en $x = 0$. Ainsi la $m^{\text{ème}}$ frange brillante est située à :

$$x_m = \frac{i}{2} + (m - 1)i.$$

Soit pour la 3^e frange claire :

$$x_3 = \frac{i}{2} + 2i = \boxed{\frac{5\lambda D}{4a}}$$

$$\text{A.N. : } x_3 = \frac{5 \times 546 \cdot 10^{-9} \times 0,7}{4 \times 1,5 \cdot 10^{-3}} = 3,2 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,32 \text{ mm}.$$

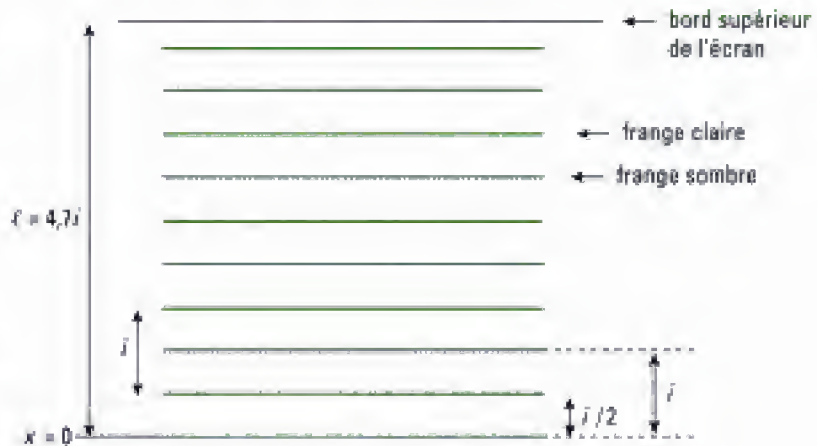
b) On peut déterminer le nombre d'interfranges observables :

$$N = \frac{\ell}{i} = \frac{2a \cdot \ell}{\lambda \cdot D} \quad \text{A.N. : } N = 4,7 \text{ interfranges.}$$

On a représenté ci-contre l'allure de l'écran afin de dénombrer les franges claires et sombres :

- 5 franges sombres
- 5 franges claires (celle du haut est légèrement tronquée mais elle reste néanmoins visible).

Les franges sont ici équidistantes puisque l'interfrange ne dépend pas de la frange considérée.



2) a) • L'ordre d'interférence p est constant sur une frange d'égale intensité, ce qui donne ici :

$$r_p = \sqrt{\frac{d^2}{2} - 4p \cdot \lambda \cdot f'} = \text{cte.}$$

Les franges sont donc **circulaires, concentriques au point O** et de rayon r_p pour l'ordre p .

• La variation de r n'est pas directement proportionnelle à p donc **les franges ne sont pas équidistantes**.

b) Le rayon r doit être compris entre $\frac{a}{2}$ et a ; pour $r = \frac{a}{2}$, on calcule $p = 4\,684,9$ et pour $r = a$, on calcule $p = 4\,677,1$. Donc : $4\,677,1 < p < 4\,684,9$.

Or on s'intéresse ici aux franges brillantes dont l'ordre d'interférence doit être un nombre entier. Il existe donc 7 valeurs possibles de p qui sont :

$$\{4\,678; 4\,679; 4\,680; 4\,681; 4\,682; 4\,683; 4\,684\}.$$

Le paramètre associé et caractérisant les franges est le rayon $r_p = \sqrt{\frac{d^2}{2} - 4p \cdot \lambda \cdot f'}$ de celles-ci. Après calculs, on obtient les 7 valeurs correspondantes suivantes :

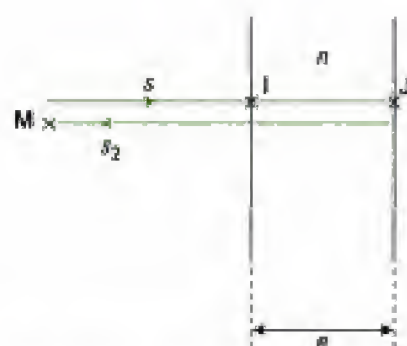
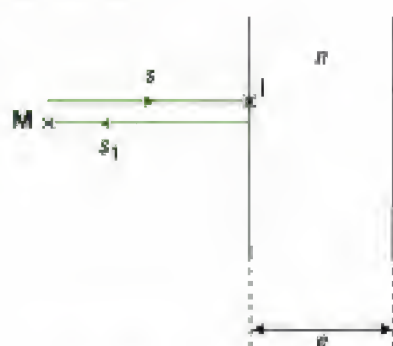
$$\{4,77 \text{ mm}; 4,52 \text{ mm}; 4,24 \text{ mm}; 3,95 \text{ mm}; 3,63 \text{ mm}; 3,29 \text{ mm}; 2,90 \text{ mm}\}.$$

Exercice 5

1) • Après chaque réflexion sur le dioptre air-eau savonneuse, l'amplitude de l'onde lumineuse (réfléchi) diminue car une partie de l'énergie est transmise à travers ce dioptre en direction de la face de sortie de la lame d'eau savonneuse. C'est pour cette raison que l'énoncé ne prend en compte que les ondes issues des deux premières réflexions, les autres ondes réfléchies ayant une amplitude négligeable devant celles-ci.

Nous allons traiter cet exercice en utilisant l'approximation scalaire de la lumière. L'onde incidente est notée s , la première onde réfléchi s_1 et la deuxième s_2 .

! Pour plus de lisibilité, on a décalé les trajets des ondes s , s_1 et s_2 qui en réalité sont portés par la droite (IM) en incidence normale. On ne s'intéresse pas à l'onde transmise en J.



En prenant l'origine des phases au point I dont la phase est notée φ_1 , la phase de l'onde s_1 au point M s'écrit :

$$\varphi_1(M) = \varphi_1 + \frac{2\pi}{\lambda_0} (IM) + \pi$$

- le déphasage supplémentaire égal à π est dû à la réflexion vitreuse depuis un milieu moins réfringent ($n_{\text{air}} = 1$) vers un milieu plus réfringent ($n_{\text{eau}} = 1,33$);
- $(IM) = IM$ car le trajet suivi par s_1 s'effectue dans l'air;
- λ_0 est la longueur d'onde dans le vide.

De même, la phase de l'onde s_2 au point M s'écrit :

$$\varphi_2(M) = \varphi_1 + \frac{2\pi}{\lambda_0} \times 2(IJ) + \frac{2\pi}{\lambda_0} IM$$

- la réflexion sur la face de sortie ne donne ici lieu à aucun déphasage supplémentaire car l'onde incidente est située dans le milieu plus réfringent;
- le chemin optique entre les points I et J est égal au produit de l'indice n de la lame par la distance géométrique IJ, ainsi : $(IJ) = ne$.

Finalement, il vient :

$$\Delta\varphi(M) = \varphi_2(M) - \varphi_1(M) = \frac{4\pi}{\lambda_0} \cdot ne - \pi.$$

Il s'agit du déphasage de l'onde s_2 par rapport à l'onde s_1 en M.

2) Pour que l'intensité lumineuse soit maximale au point M, il faut que les contributions des vibrations s_1 et s_2 soient additives à chaque instant. En d'autres termes, les ondes correspondantes doivent être en phase et il s'agit d'interférences totalement constructives;

$$\Delta\varphi(M) = 2m \cdot \pi, \quad m \in \mathbb{N}$$

donc :

$$\frac{4\pi}{\lambda_0} \cdot ne = (2m + 1) \cdot \pi$$

ce qui équivaut à :

$$\frac{1}{\lambda_0} = \frac{2m + 1}{4ne} = \frac{m}{2ne} + \frac{1}{4ne} \quad (m \in \mathbb{N}) \quad (1)$$

⚠ Ici m appartient à \mathbb{N} car s_2 ne peut pas être en avance sur s_1 au point M.

3) En notant λ_j la longueur d'onde associée à une radiation de couleur jaune, il vient pour une épaisseur e donnée de la lame d'après (1) :

$$4ne = (2m + 1) \cdot \lambda_j \quad \text{avec} \quad \lambda_j = 580 \text{ nm.}$$

⚠ Il faut avoir en tête les longueurs d'ondes associées aux couleurs du domaine visible.

Pour l'épaisseur e considérée, si la bulle paraît jaune, alors les maxima adjacents tels que :

$$4ne = [2(m + 1) + 1] \cdot \lambda = (2m + 3) \cdot \lambda$$

$$4ne = [2(m - 1) + 1] \cdot \lambda = (2m - 1) \cdot \lambda$$

doivent correspondre à des longueurs d'onde λ situées hors du domaine visible [400 ; 800] nm.

Déterminons numériquement les valeurs de λ correspondant aux premières valeurs de m .

Si $m = 0$, alors $e = \frac{\lambda_j}{4n} = \frac{580}{4 \times 1,33} = 109 \text{ nm}$

et donc le premier maximum suivant pour $m = 1$, donne : $\lambda = \frac{4ne}{3} = \frac{4 \times 1,33 \times 109}{3} = 193 \text{ nm}$.

Pour cette valeur de e , les valeurs suivantes de m conduisent à des longueurs d'onde $\lambda = \frac{4ne}{2m+1}$ encore plus faibles. En ce cas, seule la radiation jaune du domaine visible est réfléchiée vers l'œil de l'observateur.

Si $m = 1$, alors $e = \frac{3\lambda_j}{4n} = 327 \text{ nm}$

et donc $\begin{cases} 1^{\text{er}} \text{ maximum suivant pour } m = 2, \text{ donc : } \lambda = \frac{4ne}{5} = 348 \text{ nm} \\ 1^{\text{er}} \text{ maximum précédent pour } m = 0, \text{ donc : } \lambda = 4ne = 1\,740 \text{ nm} \end{cases}$

À nouveau, on constate que seule la radiation de couleur jaune du domaine visible est réfléchiée.

Si $m = 2$, alors $e = \frac{5\lambda_j}{4n} = 545 \text{ nm}$

et donc $\begin{cases} 1^{\text{er}} \text{ maximum suivant pour } m = 3, \text{ donc : } \lambda = \frac{4ne}{7} = 414 \text{ nm} \\ 1^{\text{er}} \text{ maximum précédent pour } m = 1, \text{ donc : } \lambda = \frac{4ne}{3} = 966 \text{ nm} \end{cases}$

Cette épaisseur n'est pas compatible avec la couleur perçue par l'observateur puisqu'une deuxième radiation $\lambda = 414 \text{ nm}$ du domaine visible est réfléchiée (couleur violette) : il y a donc mélange de deux couleurs.

Si $m > 2$, on vérifie aisément que plusieurs radiations appartenant au visible sont réfléchies.

Conclusion : les seules valeurs possibles de l'épaisseur de la bulle sont **109 nm** et **327 nm**.

Remarque

On peut affiner la résolution en tenant compte de la largeur spectrale à mi-hauteur de la courbe d'intensité associée aux deux ondes réfléchies s_1 et s_2 qui interfèrent.

Exercice 6

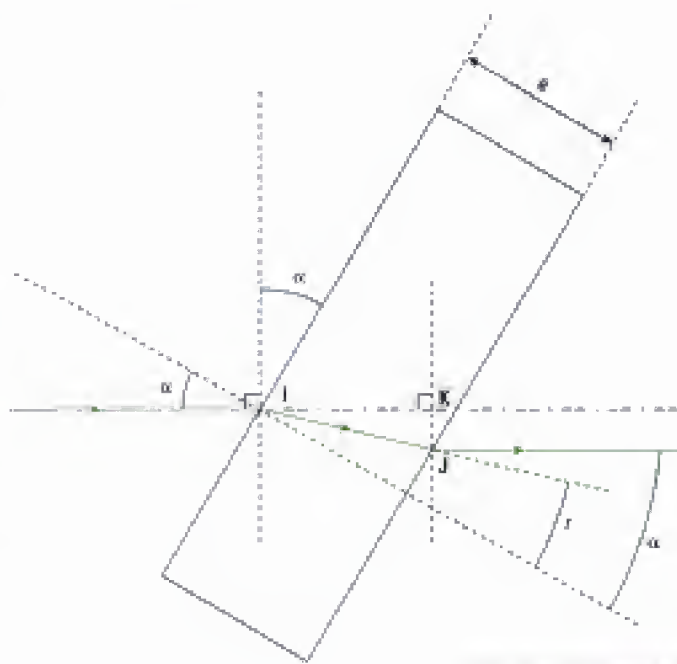
1) On commence par effectuer une construction géométrique.

On note r l'angle de réfraction dans la lame :

$$\sin \alpha = n \sin r.$$

Le rayon incident et le rayon émergent de la lame ont même direction.

Le chemin optique suivi par le rayon lumineux au cours de la traversée de la lame est ici noté (IJ). Si la lame n'avait pas été placée sur son trajet, il aurait gardé la direction IK. Or les points J et K sont situés sur le même plan d'onde (perpendiculaire au rayon émergent et à la direction du rayon incident). Par conséquent, sans la présence de la lame, le rayon non dévié aurait suivi le chemin optique (IK) égal à IJ ($n = 1$ dans l'air).



La différence de marche δ_L introduite par la lame s'écrit donc :

$$\delta_L = (IJ) - (IK) = n \cdot IJ - IK$$

avec :

$$IJ = \frac{e}{\cos r} \text{ et } IK = IJ \cdot \cos(\alpha - r)$$

et donc :

$$\delta_L = n \cdot \frac{e}{\cos r} - \frac{e}{\cos r} \cdot \cos(\alpha - r) = \frac{e}{\cos r} \cdot [n - \cos(\alpha - r)].$$

On réécrit la quantité $n - \cos(\alpha - r)$:

$$\begin{aligned} n - \cos(\alpha - r) &= n - \cos \alpha \cdot \cos r - \sin \alpha \cdot \sin r = n - \cos \alpha \cdot \cos r - n \cdot \sin^2 r \\ &= n - \cos \alpha \cdot \cos r - n \cdot (1 - \cos^2 r) = \cos r \cdot (n \cdot \cos r - \cos \alpha) \end{aligned}$$

d'où :

$$\delta_L = e \cdot (n \cdot \cos r - \cos \alpha).$$



On a intérêt ici à introduire la variable α dont on sait qu'elle est petite devant 1. Dans un deuxième temps, on effectuera un développement limité.

Avec $\cos r = \sqrt{1 - \sin^2 r} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \alpha}{n}\right)^2}$, il vient :

$$\delta_L = e \cdot \left[n \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \alpha}{n}\right)^2} - \cos \alpha \right].$$

En se limitant à l'ordre 2 en α : $\sin \alpha \approx \alpha$; $\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ donc :

$$\delta_L \approx e \cdot \left[n \cdot \left(1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} \right) - \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} \right) \right]$$

ce qui équivaut à : $\delta_L = e \cdot \left[(n - 1) + \frac{\alpha^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right]$ (1)

Test : si e tend vers 0, on trouve $\delta_L \rightarrow 0$ comme il se doit.

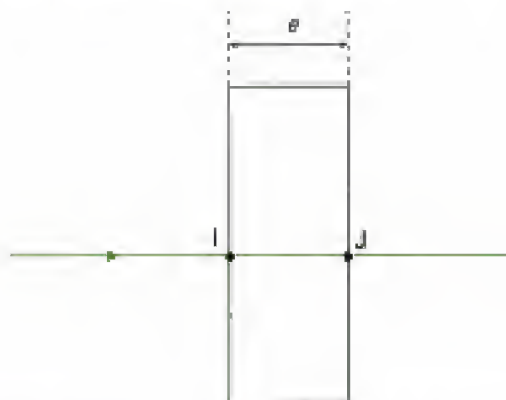
2) Si le rayon incident est normal à la face d'entrée de la lame à faces parallèles, on a $\alpha = 0$.

En prenant la limite de $\delta_L(\alpha)$ pour $\alpha \rightarrow 0$ à partir de (1), il vient :

$$\delta_L(\alpha = 0) = (n - 1) \cdot e$$

Commentaire

Ce résultat est utilisé fréquemment (voir exercices du prochain chapitre). En pratique, il est établi en raisonnant directement dans le cas de l'incidence normale :



- chemin optique parcouru par le rayon dans la lame : $(IJ) = n \cdot e$

- chemin optique parcouru entre les mêmes points sans la lame : e

donc : $\delta_L = ne - e = (n - 1) \cdot e$.

Comme $n > 1$, on remarque que la lame provoque une augmentation du chemin optique.

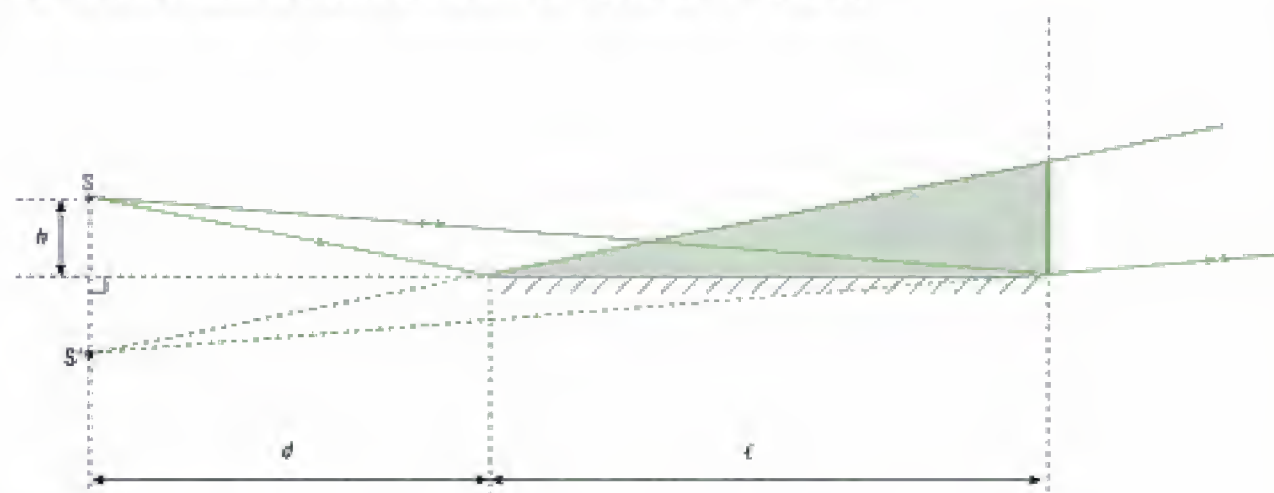
Exercices de niveau 3

Exercice 7

1) • Zone d'interférences dans (P)

Considérons un point source S de la fente fine. Cette source ponctuelle émet des ondes sphériques. Il faut donc appliquer la méthode 2 et commencer par rechercher la ou les sources secondaires associées à S . Ici il n'y a qu'une seule source secondaire S' obtenue en prenant le symétrique de S par rapport au plan du miroir.

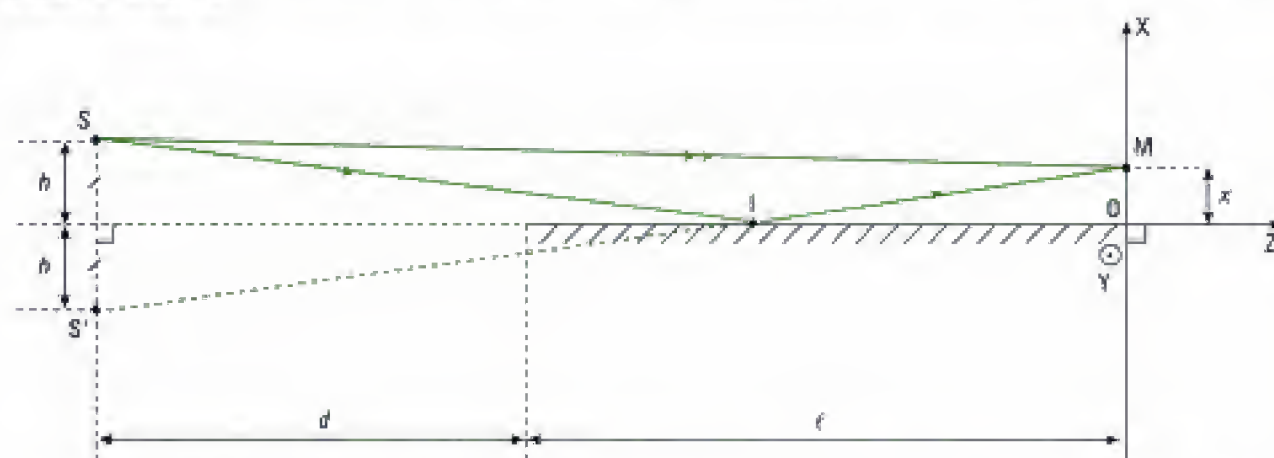
On en déduit ainsi la zone d'interférences représentée ci-dessous :



■ : champ d'interférences
 — : champ d'interférences dans (P)

• Expression de l'interfrange i

Pour évaluer l'interfrange, on commence par déterminer la différence de marche $\delta(M)$ en un point M de la zone d'interférences (voir méthode 3). Le point M est repéré dans le repère (OXYZ) représenté ci-dessous :



On raisonne ici dans le plan où se propage le rayon SI que l'on fait correspondre au plan $y = 0$. La réflexion au point I s'accompagne d'un déphasage supplémentaire égal à π (miroir dioptrique). Ce déphasage supplémentaire correspond donc à une différence de marche supplémentaire égale à $\frac{\lambda}{2}$. Il vient donc :

$$\delta(M) = (L_2) - (L_1) = (SIM) + \frac{\lambda}{2} - (SM).$$

Nous allons en outre supposer que le milieu de propagation est ici l'air dont l'indice sera pris égal à 1. Donc :

$$\delta = \text{SIM} + \frac{\lambda}{2} - \text{SM}$$

avec : $\text{SM} = [(x - h)^2 + (d + \ell)^2]^{\frac{1}{2}}$

et $\text{SIM} = \text{SI} + \text{IM}$ et $\text{SI} = \text{S'I}$ car S' est le symétrique de S par rapport à (OZ)

donc $\text{SIM} = \text{S'I} + \text{IM} = \text{S'M} = [(x + h)^2 + (d + \ell)^2]^{\frac{1}{2}}$.



Comme il a été vu en cours, δ doit être inférieure à la longueur de cohérence L_c de la source. Ceci impose que M soit alors peu éloigné du point O . Donc, on a : $x \ll d + \ell$.

En outre, par hypothèse $h \ll \ell$, donc $h \ll d + \ell$.

Toutes ces remarques nous conduisent à effectuer un développement limité de SM et SIM :

$$\text{SM} = (d + \ell) \cdot \left[1 + \left(\frac{x - h}{d + \ell} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = (d + \ell) \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x - h}{d + \ell} \right)^2 \right] \text{ à l'ordre 2 en } \frac{x - h}{d + \ell},$$

$$\text{SIM} = (d + \ell) \cdot \left[1 + \left(\frac{x + h}{d + \ell} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = (d + \ell) \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x + h}{d + \ell} \right)^2 \right] \text{ à l'ordre 2 en } \frac{x + h}{d + \ell},$$

$$\text{d'où : } \delta(\text{M}) = \text{SIM} - \text{SM} + \frac{\lambda}{2} = \frac{(x + h)^2 - (x - h)^2}{2(d + \ell)} + \frac{\lambda}{2} = \frac{2xh}{d + \ell} + \frac{\lambda}{2} \quad (1)$$



La source étant ici une fente dirigée selon (OY) , il faut aussi prendre en compte la coordonnée Y . Toutefois, le raisonnement précédent reste vrai dans tout plan $Y = \text{cte}$. Cette remarque permet au passage d'indiquer que les franges d'interférences qui correspondent à l'équation $\delta(\text{M}) = \text{cte}$ sont ici rectilignes et parallèles à (OY) .

On déduit l'interfrange, la différence de marche variant ici linéairement avec x :

$$i = \frac{\lambda}{\frac{d\delta}{dx}}, \text{ avec } \frac{d\delta}{dx} = \frac{2h}{d + \ell} \text{ d'après (1)}$$

donc :

$$i = \frac{\lambda \cdot (d + \ell)}{2h}$$



L'énoncé ne précisait rien sur la différence de marche éventuelle égale à $\frac{\lambda}{2}$. On comprend *a posteriori* pourquoi puisqu'elle disparaît lorsqu'il s'agit de calculer $\frac{d\delta}{dx}$.

Autre méthode :

Nous donnons ci-dessous une autre démarche pour obtenir l'interfrange i à partir de $\delta(\text{M})$ en remarquant que les positions où l'éclairement est maximal sont telles que :

$$\delta = m\lambda \quad (m \in \mathbb{Z}), \text{ donc } \frac{2x_m \cdot h}{d + \ell} = m\lambda - \frac{\lambda}{2} \text{ soit :}$$

$$\Delta x_m = \frac{(d + \ell) \cdot \lambda}{2h} \cdot \Delta m.$$

Avec $i = \Delta x_m$ si $\Delta m = 1$, on retrouve :

$$i = \frac{\lambda \cdot (d + \ell)}{2h}.$$

2) L'image géométrique i' de l'interfrange i donnée par la lentille est de taille déterminée à partir des relations usuelles de conjugaison (rappel : x et h sont très petits devant ℓ ce qui permet de légitimer les conditions de Gauss pour la lentille dont l'axe optique se situe ici à $x = y = 0$).

$$\text{Ainsi : } \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

avec O : centre optique de la lentille de focale f'

$\overline{OA'}$: position de l'image du plan (P) donnée par la lentille

$$\text{donc : } \overline{OA'} = \frac{f' \cdot \overline{OA}}{\overline{OA} + f'}$$

$$\text{A.N. : } \overline{OA'} = \frac{10 \times (-10,5)}{-10,5 + 10} = 210 \text{ cm.}$$

$$\text{De plus : } i' = \gamma i = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \cdot \frac{\lambda \cdot (d + \ell)}{2h}$$

et donc :

$$h = \frac{\lambda \cdot \overline{OA'} \cdot (d + \ell)}{2\overline{OA} \cdot i'}$$

$$\text{A.N. : } h = \frac{0,63 \cdot 10^{-6} \times 2,1 \times (0,2 + 0,25)}{2 \times 0,105 \times 1,5 \cdot 10^{-3}} = 1,89 \cdot 10^{-3} \text{ m} = \mathbf{1,89 \text{ mm.}}$$

Commentaires

Comme toujours, il est bon de faire des remarques qualitatives qui enrichissent la résolution purement mathématique du problème posé. Ici, on peut par exemple indiquer que :

- la source employée peut être par exemple un laser He – Ne ($\lambda = 632,8 \text{ nm}$);
- l'expérience nécessite une précision de mesure importante. h est en effet très petite et il s'agit de placer à cette hauteur une fente source orientée selon (OY);
- même avec la lentille, l'interfrange est assez petite (1,5 mm). On peut songer utiliser en remplacement un oculaire micrométrique gradué (mais pas sans précaution si la source est un laser dont l'intensité peut être dangereuse pour l'œil !).

Exercice 8

1) Le rayon réfléchi IM sur la face avant de la lame (figure 1) peut être interprété comme issu d'une source virtuelle S_1 symétrique de S par rapport à la face avant de la lame.

La source secondaire S_2 est quant à elle mise en évidence en commençant par tracer le trajet suivi par un rayon qui se réfléchit sur la face arrière, après réfraction sur la face avant. On utilise à cette fin les lois de Descartes de la réflexion et de la réfraction.

Le rayon SI' émerge de la lame après une réfraction en I' suivie d'une réflexion en J et d'une réfraction en K.

Le prolongement virtuel du rayon émergent KM coupe la direction (SO) au point S_2 qui peut être interprété comme une deuxième source secondaire virtuelle.

Conclusion : S_1 et S_2 sont deux sources secondaires virtuelles issues de la même source primaire S. Elles sont donc cohérentes et susceptibles d'interférer au point M de l'écran.

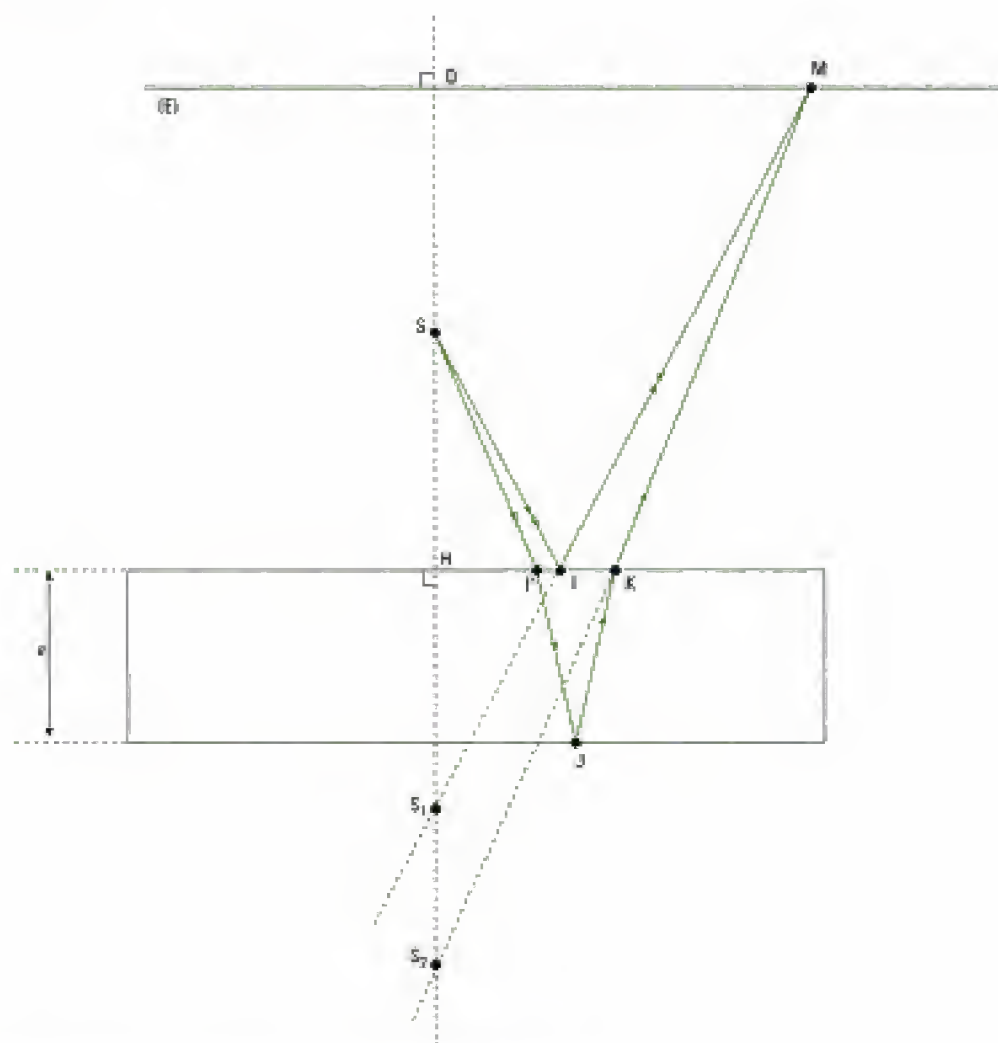


figure 1

2) • Si les points I et I' sont confondus

Dans cette situation, un même rayon incident issu de S donne un rayon ① réfléchi par la face d'entrée de la lame et un rayon ② réfracté par la lame. Les lois de Descartes montrent que ce rayon ressort de la lame parallèlement au rayon ①.

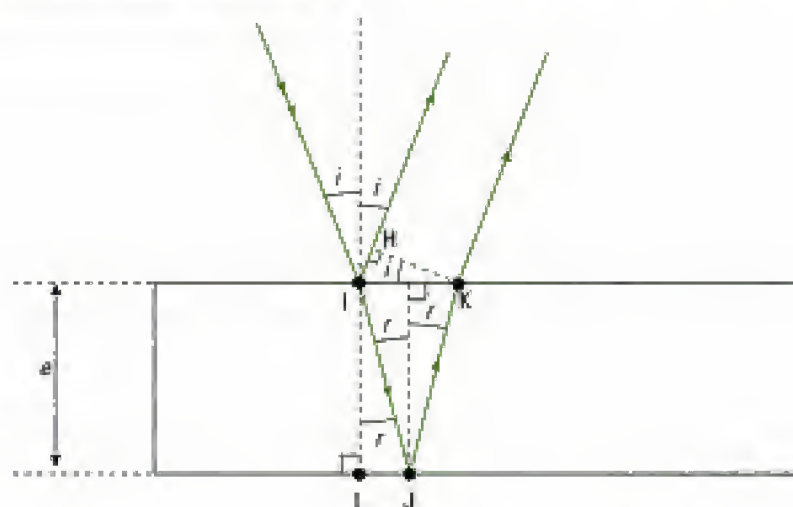


figure 2

Conclusion : les rayons ① et ② issus d'un même rayon incident sont **parallèles entre eux et ne peuvent interférer qu'à l'infini** (M est ainsi rejeté en théorie à l'infini).

• Où faut-il placer l'écran (E) ?

En pratique, l'infini se traduit expérimentalement par un éloignement de quelques mètres de l'écran par rapport à la lame.

 La lame de mica constitue donc l'interféromètre qui est ici à division d'amplitude.

• Mise en évidence géométrique de δ

Reprenons la figure 2 pour mettre en évidence la différence de marche δ entre les rayons ① et ②. Au point I, ils sont en phase tandis que les points H et K sont sur le même plan d'onde (l'onde renvoyée vers l'écran devient plane avec l'approximation faite précédemment).

Or le rayon ① parcourt entre I et H le chemin (IH) dans l'air en notant en outre que la réflexion en I s'accompagne d'une différence de marche supplémentaire égale à $\frac{\lambda_0}{2}$ car elle s'effectue d'un milieu moins réfringent (l'air) vers un milieu plus réfringent (mica). Quant au rayon ②, il parcourt le chemin (IJK) dans le mica pour aller du point I vers le point K.

Les deux rayons étant en phase sur le plan d'onde passant par H et K, il vient ainsi :

$$\delta = (\text{IJK}) - \left[(\text{IH}) + \frac{\lambda_0}{2} \right] = (\text{IJK}) - \text{IH} - \frac{\lambda_0}{2}.$$

3) On reprend l'expression précédente de δ avec :

(IH) = IH (l'indice de l'air est pris égal à 1) et (IJK) = (IJ) + (JK) = $n \cdot \text{IJ} + n \cdot \text{JK}$.

 Il faut exprimer IH, IJ et JK en fonction de n , e et r en utilisant les lois de Descartes et des considérations géométriques.

Ainsi :

• $\text{IJ} = \text{JK} = \frac{e}{\cos r}$

• $\text{IH} = \text{IK} \cdot \sin i$ avec : $\text{IK} = 2 \cdot \text{JL} = 2e \cdot \tan r$
 $\sin i = n \cdot \sin r,$

donc : $\text{IH} = 2e \cdot \tan r \cdot n \cdot \sin r = 2ne \cdot \frac{\sin^2 r}{\cos r}$

d'où : $\delta = 2n \cdot \frac{e}{\cos r} - 2ne \cdot \frac{\sin^2 r}{\cos r} - \frac{\lambda_0}{2} = 2ne \cdot \frac{1 - \sin^2 r}{\cos r} - \frac{\lambda_0}{2}$

soit :
$$\delta = 2ne \cdot \cos r - \frac{\lambda_0}{2} \quad (1)$$

4) Les surfaces d'égale intensité correspondent à l'ensemble des points M vérifiant $\delta(M) = \text{cte}$. D'après (1), il faut donc que $r = \text{cte}$, soit $i = \text{cte}$. Les résultats précédents étant en outre vrais dans tout plan contenant (OS), le point M est ainsi situé dans (E) sur un cercle centré en O.

La figure d'interférences est donc constituée d'un **ensemble de cercles contenus dans (E), concentriques et centrés en O**.

Commentaire

Ces cercles correspondent à l'intersection d'hyperboloïdes de foyers S_1 et S_2 avec (E) qui ont été représentés à la figure 4 du chapitre 3.

 Les ondes ① et ② qui interfèrent sont d'amplitudes très différentes en pratique et ce à cause des pertes par réflexion et transmission ce qui donne lieu à une figure d'interférences peu contrastée.

Exercice 9

1) Cet étudiant a constaté le peu de luminosité de la scène à photographier et par réflexe enclenche le flash.

Or, si éclairer davantage un objet peu éclairé à l'aide d'une source extérieure (flash) a un sens, éclairer davantage une image peu lumineuse n'a aucun sens.

En effet, l'image des interférences est la manifestation de l'interaction de la lumière du champ d'interférences avec l'écran, généralement diffusant. Mais la lumière diffusée dans l'interaction flash-écran étant très supérieure à celle diffusée par l'interaction lumière du champ d'interférences-écran, cet étudiant photographie donc... l'écran dont la couleur était donc... blanche.

2) L'expérience nous montre que l'on observe sur la lame mince d'eau savonneuse des franges colorées dont la couleur varie avec la hauteur de la frange, repérée sur la verticale.

Cette question est à rapprocher de l'étude menée à l'exercice 5 de ce chapitre portant sur l'étude locale d'une lame d'eau savonneuse assimilée à une lame à faces parallèles. Nous avons montré que le déphasage entre l'onde réfléchi en incidence normale sur la face d'entrée et l'onde réfléchi sur la face de sortie est égal à :

$$\Delta\phi(M) = \frac{4\pi}{\lambda_0} \cdot ne - \pi \quad (1)$$

avec : λ_0 , longueur d'onde de la lumière incidente

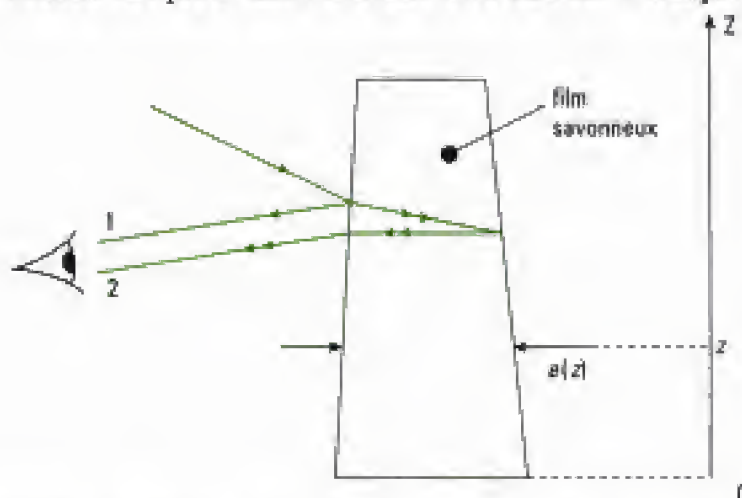
n , indice de l'eau savonneuse

e , épaisseur de la lame à faces parallèles

M , point situé sur la normale à la lame.

On peut donc tirer une *première conclusion* : l'épaisseur n'est pas constante selon la hauteur considérée. Cette variation d'épaisseur est due en particulier à la gravité qui va induire une épaisseur plus importante au bas de ce film savonneux.

Nous proposons un schéma lorsque le film est éclairé sous incidence oblique et observé à l'œil nu :



Nous avons volontairement exagéré l'inclinaison des faces du film sur la verticale. Localement, le film peut être assimilé à une lame à faces parallèles : les rayons émergents sont parallèles.

Pour utiliser les résultats de l'exercice 5, on raisonnera en incidence normale et une observation également faite dans cette direction afin d'utiliser (1) (sous incidence oblique, il faut ajouter un facteur de correction mais l'étude générale reste identique).

Les amplitudes des ondes 1 et 2 étant voisines, l'intensité lumineuse reçue par l'œil peut s'écrire :

$$I(M) = 2I_0 [1 + \cos(\Delta\phi(M))] = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\Delta\phi(M)}{2}\right)$$

pour chaque radiation du spectre visible $[0,4 ; 0,8] \mu\text{m}$.

Les différentes radiations du spectre visible étant toutes incohérentes entre elles, l'intensité totale correspond à la somme des intensités associées à chaque radiation. Mais chaque radiation, de longueur d'onde λ_0 , n'a pas la même intensité à $s(s)$ donnée car $\Delta\phi$ dépend de λ_0 .

Deuxième conclusion : à une hauteur donnée $e(z)$, correspond une couleur qui résulte de l'addition des radiations du visible dont l'intensité lumineuse est prépondérante.

Lorsque l'altitude z varie, $e(z)$ varie également donc $\Delta\varphi(M)$ varie pour chaque radiation du visible. Le mélange des couleurs est modifié.

Troisième conclusion : la couleur du film mince varie en fonction de la hauteur z .

Sur le bord supérieur du film, l'épaisseur est minimale et tend vers une valeur très faible, notamment en fin de vie du film. Ainsi, lorsque $ne \ll \frac{\lambda_0}{2}$, $\delta(M) \rightarrow -\frac{\lambda_0}{2}$ et $\Delta\varphi(M) \rightarrow -\pi$ pour toute

longueur d'onde du visible. Les interférences entre les ondes 1 et 2 sont totalement destructives.

Quatrième conclusion : l'œil perçoit une zone noire sur le bord supérieur du film avant que celui-ci n'éclate.

Au contraire, si l'épaisseur augmente, de plus en plus de longueurs d'onde du visible peuvent véri-

fier la condition $\Delta\varphi(M) = \frac{4\pi}{\lambda_0} \cdot ne - \pi = 2m\pi$ ($m \in \mathbb{N}$) car il est de plus en plus possible de trouver

un entier m vérifiant cette condition pour différentes valeurs de λ_0 . Toutes les couleurs associées à ces longueurs d'onde se superposent pour donner une sensation visuelle de blanc.

Cinquième conclusion : lorsque l'épaisseur du film est suffisante, l'œil perçoit une couleur blanche.

Remarques

– Certaines radiations du spectre visible seront absentes dans ce cas. On parle alors de blanc d'ordre supérieur dont nous reparlerons au chapitre 4.

– À chaque couleur de frange observée correspond une valeur de l'épaisseur de la lame. On parle de franges d'égale épaisseur que l'on retrouvera dans l'étude de l'interféromètre de Michelson.

– Cette étude reste très sommaire et bon nombre de points peuvent encore être abordés.

3) La bulle possède à $t = 0$ une certaine épaisseur que nous noterons $e(0)$. L'énoncé indique que la différence de pression s'écrit :

$$p_{\text{int}} - p_{\text{ext}} = \frac{4A}{R}, \text{ donc } p_{\text{int}} = p_{\text{ext}} + \frac{4A}{R} > p_{\text{ext}} \text{ (car } A > 0).$$

Ainsi, la pression intérieure à la bulle provoque une augmentation de son rayon $R(t)$ et donc son amincissement (car la masse du film liquide se conserve tant que la bulle existe...). Donc : l'épaisseur $e(t)$ diminue au cours du temps depuis $e(0)$.

L'étude menée dans la question précédente permet alors d'interpréter l'absence de couleurs au début de la formation de la bulle. En effet, tant que $e(t)$ est supérieure à une certaine valeur (en pratique quelques micromètres), notre œil perçoit du blanc (d'ordre supérieur). Ensuite, l'épaisseur diminuant, elle prend certaines valeurs qui favorisent les interférences constructives de certaines radiations du visible et l'apparition de couleurs perçues par notre œil.



Lorsque la bulle est proche de son éclatement, le film mince devient noir. En effet, $e(t)$ tend à devenir nulle et les interférences sont alors totalement destructives pour toutes les radiations du spectre visible.

Interférences non localisées à deux ondes : interféromètres à division de front d'onde

Cohérence spatiale

Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions les dispositifs interférentiels par division de front d'onde tels que les miroirs de Fresnel et les trous ou fentes de Young. Les interférences observées sont alors non localisées.

Si ces dispositifs sont liés à l'histoire des sciences, et de ce fait permettent une approche des notions physiques liées aux interférences, comme la cohérence spatiale des sources, le dispositif de Young garde un intérêt pratique puisqu'il permet la mesure de l'angle sous lequel nous voyons les étoiles depuis la Terre, en utilisant la disparition du phénomène d'interférences par perte de cohérence spatiale.

Plan du chapitre 3

A. Interférences à deux ondes totalement cohérentes	84
1. Interférences de deux ondes planes	84
2. Interférences de deux ondes sphériques	86
B. Interférences non localisées à deux ondes, à partir d'un interféromètre à division de front d'onde	92
1. Les miroirs de Fresnel	92
2. Les trous ou les fentes de Young	95
C. Trous ou fentes de Young éclairés par une source primaire étendue – Cohérence spatiale	98
<i>Méthodes</i>	
L'essentiel ; mise en œuvre	103
<i>Énoncés des exercices</i>	108
<i>Indications</i>	111
<i>Solutions des exercices</i>	112

A. Interférences à deux ondes totalement cohérentes

Nous considérons des interférences à deux ondes totalement cohérentes, ce qui signifie que :

- les vecteurs champs électriques restent colinéaires, soit par polarisation, soit si l'on se place loin des sources ;
- les deux ondes sont obtenues à partir d'une source unique monochromatique par un diviseur d'ondes appelé interféromètre ;
- la différence des temps de parcours des ondes le long des deux bras de l'interféromètre est faible devant la durée de cohérence de la source.

Les ondes qui sont issues de ces sources peuvent donc interférer¹.

1. Cf. chapitre 2.

A.1. Interférences de deux ondes planes

A.1.1 – Hypothèses

Considérons un point M dans un espace supposé homogène et isotrope d'indice n , repéré par rapport à une origine O grâce au vecteur position $\vec{r} = \overline{OM}$. Deux ondes planes monochromatiques, de même fréquence, de même amplitude, totalement cohérentes, se superposent dans cet espace (figure 1).

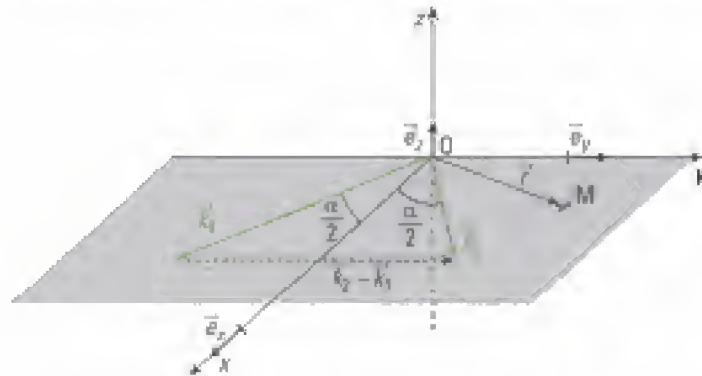


Fig. 1 – Superposition de deux ondes planes de vecteurs d'onde \vec{k}_1 et \vec{k}_2 . Nous choisissons de confondre l'axe Ox avec la bissectrice de l'angle (\vec{k}_1, \vec{k}_2) .

A.1.2 – Application du théorème de superposition

En M, la superposition des ondes donne la vibration lumineuse $E(M)$:

$$E(M) = E_0 \cos(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \varphi_{s1}) + E_0 \cos(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \varphi_{s2}),$$

avec $k_1 = k_2 = \frac{2\pi n}{\lambda_0}$. En exprimant la somme de cosinus sous la forme d'un produit, il vient :

$$\begin{aligned} E(M) &= 2E_0 \cos \left[\frac{\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \varphi_{s1} + \omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \varphi_{s2}}{2} \right] \cos \left[\frac{\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \varphi_{s1} - \omega t + \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \varphi_{s2}}{2} \right] \\ &= 2E_0 \cos \left[\frac{\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \varphi_{s1} + \omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \varphi_{s2}}{2} \right] \cos \left[\frac{-\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \varphi_{s1} + \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \varphi_{s2}}{2} \right]. \end{aligned}$$

Posons $\vec{K} = \frac{1}{2} (\vec{k}_1 + \vec{k}_2)$ et $\Delta\varphi_s = \varphi_{s2} - \varphi_{s1}$. Avec les hypothèses de travail, le vecteur d'onde \vec{K} est donc porté par l'axe Ox et :

$$E(M) = 2E_0 \cos \left[\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r} - \frac{\varphi_{s1} + \varphi_{s2}}{2} \right] \cos \left[\left(\frac{\vec{k}_2 - \vec{k}_1}{2} \right) \cdot \vec{r} + \frac{\Delta\varphi_s}{2} \right].$$

Dans le terme $\cos \left[\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r} - \frac{\varphi_{S1} + \varphi_{S2}}{2} \right]$, nous reconnaissons une onde progressive de vecteur d'onde \vec{K} se déplaçant à la vitesse de phase :

$$v = \frac{\omega}{\|\vec{K}\|} = \frac{2\omega}{\|\vec{k}_1 + \vec{k}_2\|}.$$

A.1.3 – Intensité lumineuse en un point M de l'écran

L'intensité lumineuse en M est alors :

$$I = 2 \langle E^2 \rangle_t = 8E_0^2 \left\langle \cos^2 \left[\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r} - \frac{\varphi_{S1} + \varphi_{S2}}{2} \right] \right\rangle_t \cos^2 \left[\left(\frac{\vec{k}_2 - \vec{k}_1}{2} \right) \cdot \vec{r} + \frac{\Delta\varphi_S}{2} \right]$$

soit¹ :

$$I = 2E_0^2 [1 + \cos [(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r} + \Delta\varphi_S]] = 2I_0 [1 + \cos [(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r} + \Delta\varphi_S]].$$

Comme $(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) = 2k_1 \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \vec{e}_y$ (figure 1), nous avons donc :

$$(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r} = 2k_1 \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \vec{e}_y \cdot (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y) = 2k_1 y \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right).$$

A.1.4 – Surfaces d'égale intensité lumineuse – Interfrange

Les surfaces d'égale intensité, ou franges d'interférences, sont telles que $(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r} = 2k_1 y \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \text{cte}$ et correspondent donc à des plans de coordonnée y constante.

Les interférences existent dans tout l'espace où les ondes se recouvrent : elles sont dites **non localisées**.

L'intensité lumineuse peut se réécrire sous la forme :

$$I = 2I_0 \left[1 + \cos \left[2k_1 y \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) + \Delta\varphi_S \right] \right] = 2I_0 \left[1 + \cos \left[2\pi \frac{y}{i} + \Delta\varphi_S \right] \right],$$

ce qui définit l'interfrange :

$$i = \frac{\lambda_0}{2n \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right)}.$$

A.1.5 – Observation dans le plan (\vec{k}_1, \vec{k}_2)

Dans ce plan, les surfaces d'égale intensité sont définies par $y = \text{cte}$; les intersections de ces plans avec le plan (\vec{k}_1, \vec{k}_2) sont des droites perpendiculaires à la direction portant $(\vec{k}_2 - \vec{k}_1)$ (figure 2), les franges sont rectilignes.

• **Ordres de grandeur pour une observation à l'œil nu au laboratoire**

Avec $n = 1$, $\lambda_0 = 600 \text{ nm}$ (jaune-orangé) et $i \approx 1 \text{ mm}$, nous trouvons que $\alpha = 10^{-3} \text{ rad}$ soit $2'$ d'angle. Cet angle étant très petit, nous avons $\sin(\alpha) = \alpha$ et l'interfrange peut être approximé à :

$$i = \frac{\lambda_0}{n\alpha} = \frac{\lambda_0}{\alpha}.$$

1. En utilisant les relations

$$\langle \cos^2(\omega t + \text{cte}) \rangle_t = \frac{1}{2},$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

et en posant $I_0 = E_0^2$.

• Intérêt

Le cas de la superposition de deux ondes planes est important à plus d'un titre. D'une part, ces ondes n'ont pas de variation de leur amplitude et les franges observées sont rectilignes; d'autre part, un faisceau laser cylindrique réalise assez bien une onde localement plane, facile à mettre en œuvre (figure 2), par exemple en interférométrie pour former des hologrammes.



Fig. 2 – Interférences par superposition de deux ondes planes: les franges rectilignes sont les intersections de l'écran avec les deux faisceaux issus d'un même laser qui interfèrent. La ligne oblique à droite de la photographie est due au reflet du bord de l'écran.

A.2. Interférences de deux ondes sphériques

A.2.1 – Hypothèses

Considérons un point M de l'espace, repéré grâce au vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, où se superposent deux ondes sphériques se propageant dans un milieu homogène et isotrope d'indice n . Ces ondes, de même fréquence, de même amplitude, issues de deux points sources S_1 et S_2 séparés dans l'espace d'une distance $S_1S_2 = a$, sont supposées totalement cohérentes (figure 3).

A.2.2 – Application du théorème de superposition

Nous examinons l'effet de la superposition de ces deux ondes sphériques en un point M de l'espace où se trouve soit un écran, soit un photodétecteur.

Nous avons vu au chapitre 1 que ces ondes sphériques s'écrivent :

$$s_p(M, t) = s_p(r, t) = A(r) \cos(\omega t - kr - \varphi_s) = \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - kr - \varphi_s)$$

et que loin de la source¹, l'amplitude reste constante autour du point M .

Nous adoptons cette hypothèse de travail qui se traduit par: $OM \gg a$.

En conséquence, les grandeurs vibratoires associées aux ondes issues respectivement des sources S_1 et S_2 s'écrivent en M sous la forme :

$E_1(M, t) = E_{1m} \exp(j(\omega t - \varphi_1(M)))$ et $E_2(M, t) = E_{2m} \exp(j(\omega t - \varphi_2(M)))$ où E_{1m} et E_{2m} sont des amplitudes constantes autour du point M .

Avec les légendes de la figure 3, et puisque $k_1 = k_2 = k$, nous obtenons :

$$\varphi_1(M) = kr_1 + \varphi_{s1} \text{ et } \varphi_2(M) = kr_2 + \varphi_{s2}.$$

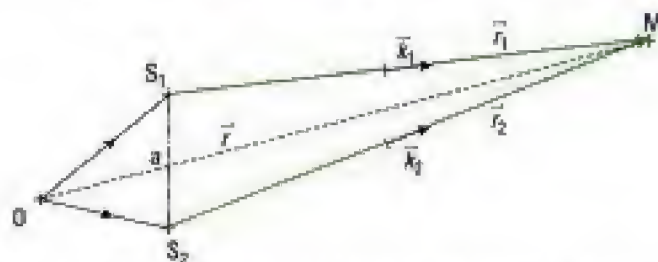


Fig. 3 – Les ondes sphériques issues de deux sources ponctuelles cohérentes S_1 et S_2 distantes de a se superposent en M (les échelles ne sont pas respectées).

1. Nous retrouvons ici l'approximation des grandes distances (chapitre 2, paragraphe C.2.2).

Dès lors, nous retrouvons la situation de l'application vue au paragraphe E.1. du chapitre 2.

Au point M , nous calculons l'intensité lumineuse associée à la vibration scalaire :

$$\underline{E}(M, t) = E_{1m} \exp(j(\omega t - \varphi_1(M))) + E_{2m} \exp(j(\omega t - \varphi_2(M))).$$

Nous laissons au lecteur le soin de se reporter au calcul précité, pour y trouver le résultat donnant l'intensité lumineuse.

A.2.3 – Intensité lumineuse en un point M de l'écran

L'intensité lumineuse en un point M de l'écran s'écrit :

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2\sqrt{I_1(M)I_2(M)} \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)).$$

En notant $\Delta\varphi_S = \varphi_{S_2} - \varphi_{S_1}$ et en écrivant que :

$$\Delta\varphi(M) = \varphi_2(M) - \varphi_1(M) = k(r_2 - r_1) + \Delta\varphi_S,$$

nous obtenons :

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\varphi(M)).$$

Les interférences existent dans tout l'espace où les ondes se recouvrent : elles sont dites **non localisées**.

A.2.4 – Surfaces d'égale intensité lumineuse

Les surfaces d'égale intensité sont telles que $I(M) = \text{cte}$. Elles ont donc pour équation :

$$\Delta\varphi(M) = k(r_2 - r_1) = \text{cte}, \text{ soit : } S_2M - S_1M = \text{cte}.$$

Les points M qui vérifient l'équation :

$$S_2M - S_1M = \text{cte}$$

sont sur des hyperboloïdes de révolution de foyers S_1 et S_2 (figure 4).

Nous nous plaçons maintenant successivement dans les deux cas les plus simples pour l'observation des interférences produites par les deux ondes sphériques (figure 5) :

- l'écran est parallèle à la droite qui porte les sources¹ ;
- l'écran est perpendiculaire à la droite qui porte les sources.

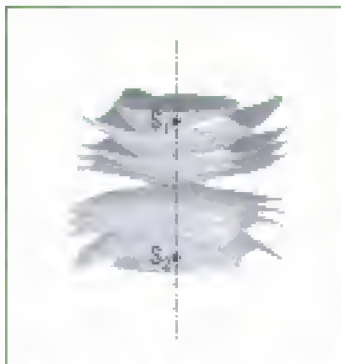


Fig. 4 – Hyperboloïdes de foyers S_1 et S_2 .

1. Nous supposons que la droite portant les sources n'est pas contenue dans le plan de l'écran.

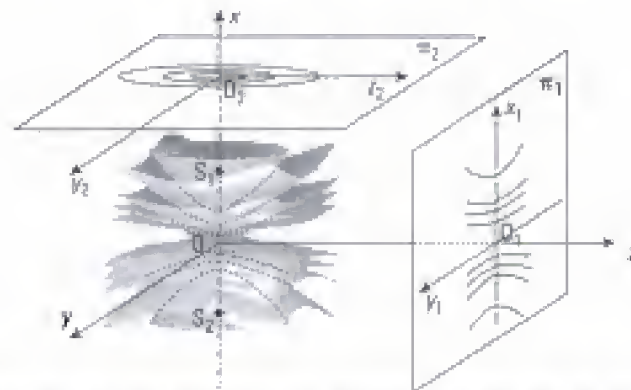


Fig. 5 – Observation des franges d'interférences intersections des plans π_1 et π_2 respectivement parallèle et perpendiculaire à l'axe des sources S_1 et S_2 qui sont les foyers des hyperboloïdes.

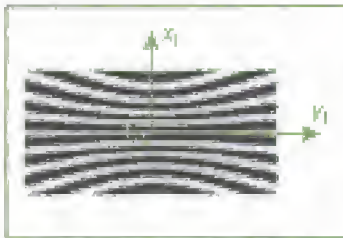


Fig. 6 – Hyperboles représentant les surfaces d'égal intensité dans un plan parallèle à la droite portant les sources.

A.2.5 – Observation sur un écran parallèle à l'axe des sources (plan π_1)

Cet écran est donc perpendiculaire à la médiatrice du segment S_1S_2 (figure 5). Dans ce cas, les franges d'interférences observées sont des hyperboles intersections des hyperboloïdes avec le plan π_1 (figures 5 et 6).

- Expression de la différence de marche et de la différence de retards de phase en un point M de l'écran

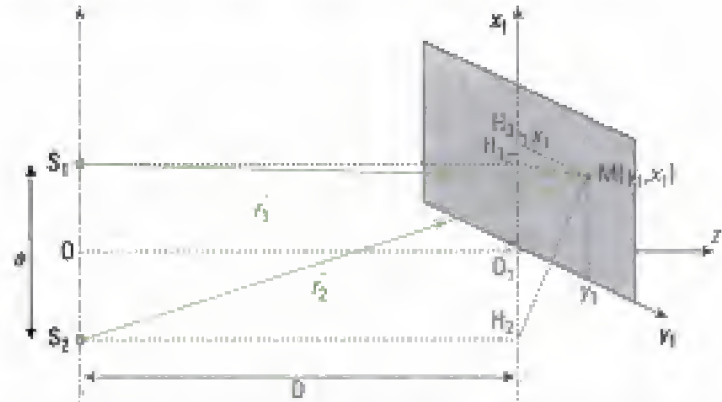


Fig. 7 – Position d'un point M de l'écran exprimée dans un repère cartésien.

Exprimons la différence $r_2 - r_1$; avec les légendes de la figure 7, en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle S_1H_1M rectangle en H_1 , avec

$$H_1M^2 = H_1H_3^2 + H_3M^2, H_1H_3 = x_1 - \frac{a}{2}, S_1H_1 = D \text{ et } H_3M = y_1,$$

nous obtenons :

$$r_1^2 = S_1H_1^2 + H_1M^2 = D^2 + \left(x_1 - \frac{a}{2}\right)^2 + y_1^2$$

soit :

$$r_1 = \sqrt{D^2 \left(1 + \left(\frac{x_1}{D} - \frac{a}{2D}\right)^2 + \frac{y_1^2}{D^2}\right)} = D \sqrt{1 - \frac{2ax_1}{2D^2} + \frac{x_1^2}{D^2} + \frac{a^2}{4D^2} + \frac{y_1^2}{D^2}}.$$

Dans la pratique, la cohérence temporelle limite la visibilité des franges à une zone située au voisinage du point O_1 ¹, ce qui fait que : $x_1 \ll D$ et $y_1 \ll D$.

La condition $OM \gg a$ implique aussi $D \gg a$.

Dans ces conditions, et par un développement limité, il vient :

$$r_1 \approx D \left(1 - \frac{ax_1}{2D^2} + \frac{x_1^2}{2D^2} + \frac{a^2}{8D^2} + \frac{y_1^2}{2D^2}\right).$$

De la même façon :

$$r_2 \approx D \left(1 + \frac{ax_1}{2D^2} + \frac{x_1^2}{2D^2} + \frac{a^2}{8D^2} + \frac{y_1^2}{2D^2}\right).$$

Ainsi :

$$r_2 - r_1 \approx \frac{ax_1}{D},$$

et

$$\delta(M) = (S_2M) - (S_1M) = n(r_2 - r_1) = \frac{nax_1}{D};$$

$$\Delta\varphi(M) = 2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda_0} + \Delta\varphi_s \approx 2\pi \frac{nax_1}{\lambda_0 D} + \Delta\varphi_s.$$

1. Cette situation respecte la troisième condition énoncée en hypothèse au début du paragraphe A. Revoir les notions de cohérence temporelle développées au chapitre 1.

1. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier la conséquence de la non nullité de $\Delta\varphi_s$.

2. Avec les hypothèses de l'étude, ces lignes sont situées au voisinage du point O_1 . Au-delà, l'absence de cohérence temporelle brouille le phénomène d'interférences.

3. Cf. chapitre 2.

4. L'interfrange i peut aussi être trouvé en utilisant la périodicité

de la fonction $\cos\left(2\pi \frac{na x_l}{\lambda_0 D}\right)$

et par la méthode 3 du chapitre 2.

5. La situation $\Delta\varphi_s \neq 0$ s'accompagne d'un déplacement des franges qui est une translation dans la direction $O_1 x_l$. De même, si un déphasage supplémentaire s'introduit, la frange centrale peut changer de nature, comme dans le cas des miroirs de Lloyd (exercice 7 du chapitre 2).

Dans la suite, nous considérerons que les deux sources sont en phase, donc :

$$\Delta\varphi_s = 0^1.$$

* Intensité lumineuse en un point M de l'écran

L'intensité lumineuse en M s'écrit alors :

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\varphi(M)) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(2\pi \frac{na x_l}{\lambda_0 D}\right).$$

* Surfaces d'égale intensité lumineuse – Interfrange

Une frange d'interférences est une frange de même différence de retard de phase :

$$\Delta\varphi(M) = 2\pi \frac{na x_l}{\lambda_0 D} = \text{cte.}$$

Les franges sont donc des lignes de coordonnées x_l constantes, ici parallèles à l'axe $O_1 y_l$. Les branches d'hyperboles se réduisent ainsi à des droites au voisinage de O_1 et ne dépendent pas de la variable y_l ; les franges sont rectilignes².

* Position des franges sur l'écran

Les franges brillantes sont telles que $\Delta\varphi(M) = 2m\pi$ avec $m \in \mathbb{Z}$ ³, de coordonnées :

$$x_{lmb} = m \frac{\lambda_0 D}{na}.$$

Les franges sombres sont telles que $\Delta\varphi(M) = (2m + 1)\pi$ avec $m \in \mathbb{Z}$, de coordonnées :

$$x_{lms} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_0 D}{na}.$$

Deux franges claires ou deux franges sombres rectilignes consécutives sont séparées par la même distance qui représente l'interfrange i .

Par exemple, pour deux franges sombres consécutives,

$$i = x_{l(m+1)s} - x_{lms} = \left(m + 1 + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_0 D}{na} - \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_0 D}{na} = \frac{\lambda_0 D}{na}.$$

L'interfrange a donc pour expression :

$$i = \frac{\lambda_0 D}{na} = \frac{\lambda D}{a}.$$

Dans le cas où $\Delta\varphi_s = 0$, la frange d'ordonnée $x_l = 0$ est une frange lumineuse pour laquelle $m = 0$: la différence de marche $\delta(M) = m\lambda$ est alors nulle. Les franges brillantes voisines se situent aux ordonnées $x_{lmb} = m i$ avec $m \in \mathbb{Z}$. $|m|$ est minimale en $x_l = 0$ et croît depuis cette position⁵.

* Ordres de grandeur dans une observation à l'œil nu au laboratoire

Dans l'air, d'indice $n \approx 1$, pour avoir $i \approx 10^{-3}$ m avec $\lambda_0 = 600$ nm, on doit avoir :

$$\frac{D}{a} \approx 1700;$$

si $D = 1$ m, alors les sources S_1 et S_2 doivent être distantes de $a = 0,6$ mm.

La condition $D \gg a$, dont on a donné une justification théorique, a aussi une justification pratique car la longueur d'onde étant très petite, pour obtenir

un interfrange $i = \frac{\lambda D}{a}$ de dimension observable, il faut $D \gg a$.

2. Il faut cependant noter que dans le cas des ondes planes, l'interfrange ne change pas quand on translate l'écran tandis qu'avec les ondes sphériques, cet interfrange change proportionnellement à la distance aux sources.



Fig. 8 – Observation du phénomène d'interférences dans un plan perpendiculaire à l'axe des sources.

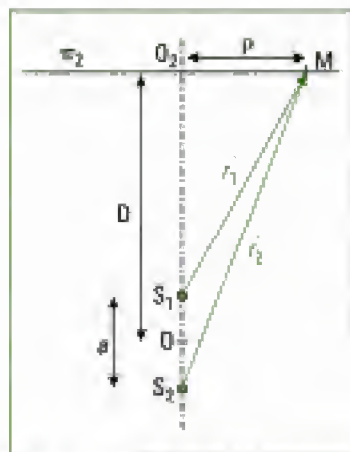


Fig. 9 – Étude des interférences observées dans un plan π_2 perpendiculaire à l'axe des sources.

Remarque :

Si dans la relation $i = \frac{\lambda_0 D}{na}$, on pose $\alpha = \frac{a}{D}$, α étant l'angle sous lequel on voit les sources S_1 et S_2 depuis le point O_1 (figures 5 et 7), alors nous obtenons $i = \frac{\lambda_0}{n\alpha}$ qui est aussi l'expression de l'interfrange trouvée pour la superposition de deux ondes planes (voir paragraphe A.1).

Nous en concluons que les approximations, $D \gg a$ ou α petit, conduisent à considérer la superposition de deux ondes sphériques comme si elle résultait de deux ondes planes dont les vecteurs d'ondes \vec{k}_1 et \vec{k}_2 seraient dirigés selon $\vec{S}_1\vec{M}$ et $\vec{S}_2\vec{M}$.

A.2.6 – Observation sur un écran perpendiculaire à l'axe des sources (plan π_2)

Dans ce plan, les franges sont encore les lieux d'intersections avec les hyperboloïdes: l'invariance par rotation autour de l'axe S_1S_2 nous permet de déduire que les franges sont circulaires, centrées en O_2 (figures 5 et 8).

• **Expression de la différence de marche en un point M de l'écran**

Avec les légendes de la figure 9, nous avons :

$$r_2 = \left[\left(D + \frac{a}{2} \right)^2 + \rho^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left(D + \frac{a}{2} \right) \left[1 + \frac{\rho^2}{\left(D + \frac{a}{2} \right)^2} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Dans la pratique, la cohérence des sources limite le champ d'interférences et $D + \frac{a}{2} \gg \rho$. Nous pouvons donc faire un développement limité au premier ordre qui donne :

$$r_2 \approx D + \frac{a}{2} + \frac{\rho^2}{2 \left(D + \frac{a}{2} \right)}.$$

De même :

$$r_1 \approx D - \frac{a}{2} + \frac{\rho^2}{2 \left(D - \frac{a}{2} \right)}.$$

Ainsi,

$$r_2 - r_1 = a + \frac{\rho^2}{2} \left(\frac{1}{D + \frac{a}{2}} - \frac{1}{D - \frac{a}{2}} \right) = a + \frac{\rho^2}{2} \left(\frac{-a}{\left(D^2 - \frac{a^2}{4} \right)} \right) = a + \frac{\rho^2}{2} \left(-\frac{a}{D^2} \right)$$

car $OM = D \gg a$. Alors : $r_2 - r_1 = a \left(1 - \frac{\rho^2}{2D^2} \right)$,

et

$$\delta(M) \approx na \left(1 - \frac{\rho^2}{2D^2} \right).$$

• **Intensité lumineuse sur l'écran placé en π_2**

L'intensité s'écrit alors :

$$I(M) = I(\rho) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \left[2\pi \frac{na}{\lambda_0} \left(1 - \frac{\rho^2}{2D^2} \right) + \Delta\varphi_S \right].$$

1. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier la conséquence de la non nullité de $\Delta\varphi_s$.

2. L'étude des symétries de la situation physique nous conduit rapidement à cette même conclusion.

Dans la suite, nous supposons que les deux sources sont en phase, donc :

$$\Delta\varphi_s = 0^1.$$

• Surfaces d'égale intensité

$\Delta\varphi(M) = \text{cte}$ ou $\delta(M) = \text{cte}$ conduisent à $\rho = \text{cte}$.

Les surfaces d'égale intensité sont donc des anneaux centrés sur l'axe des sources secondaires (figures 5, 8 et 9)².

• Position des anneaux sur l'écran – Ordre d'interférence

Les rayons des anneaux brillants sont donnés par :

$$2\pi \frac{na}{\lambda_0} \left(1 - \frac{\rho_m^2}{2D^2} \right) = 2m\pi, \text{ soit : } \boxed{\rho_m = \sqrt{2D^2 \left(1 - m \frac{\lambda_0}{na} \right)}}.$$

L'ordre d'interférence est :

$$p(M) = \frac{na}{\lambda_0} \left(1 - \frac{\rho^2}{2D^2} \right),$$

dont la valeur au centre est :

$$p(O_2) = p(\rho = 0) = \frac{na}{\lambda_0}$$

très grande puisque $a \gg \lambda_0$. Cet ordre décroît depuis le centre puisque :

$$p(M) = p(0) \left(1 - \frac{\rho^2}{2D^2} \right) < p(0).$$

• Intensité au centre des anneaux

Si $na = m' \lambda_0$ avec $m' \in \mathbb{N}$, alors l'ordre d'interférence est $p(O_2) = m'$ et O_2 est un point brillant.

Si $na = \left(m' + \frac{1}{2} \right) \lambda_0$ avec $m' \in \mathbb{N}$, alors l'ordre d'interférence est

$$p(O_2) = m' + \frac{1}{2} \text{ et } O_2 \text{ est un point sombre.}$$

Si a est quelconque, l'intensité lumineuse au point O_2 se situe de manière intermédiaire entre le brillant et le sombre (figure 8).

• Expression du rayon des anneaux brillants dans le cas d'une frange centrale brillante

Dans ce cas :

$$na = m' \lambda_0 \Leftrightarrow \frac{\lambda_0}{na} = \frac{1}{m'}$$

et donc ρ_m devient :

$$\boxed{\rho_m = \sqrt{2D^2 \frac{(m' - m)}{m'}} = \sqrt{K} D \sqrt{2 \frac{\lambda_0}{na}} = \sqrt{K} D \sqrt{\frac{2\lambda}{a}}}$$

en posant $K = m' - m$ qui est un nombre entier positif puisque l'ordre d'interférence décroît depuis le centre.

Le rayon des anneaux varie comme la racine carré des entiers successifs.

Les anneaux sont donc de plus en plus proches lorsqu'on s'éloigne de O_2 dans le plan π_2 . On ne peut donc définir globalement une période spatiale pour le phénomène : la notion d'interfrange reste locale.

B. Interférences non localisées à deux ondes, à partir d'un interféromètre à division de front d'onde

Nous abordons maintenant deux dispositifs interférentiels à division de front d'onde : les miroirs de Fresnel et les trous (ou fentes) de Young.

Ces dispositifs permettent d'obtenir deux sources cohérentes et donc de se trouver dans les conditions de l'étude menée au paragraphe A.

B.1. Les miroirs de Fresnel

C'est un dispositif historique conçu par Fresnel qui lui a permis d'étudier les interférences lumineuses et de mesurer de nombreuses longueurs d'onde optiques.

B.1.1 – Principe du dispositif

1. Ces miroirs sont de forme rectangulaire, de dimensions de l'ordre de la dizaine de centimètres, d'épaisseur quelques millimètres.

2. Qualifié aussi d'angle dièdre.

Ce dispositif interférentiel (figures 10 et 11) est formé de deux miroirs plans M_1 et M_2 en verre¹, d'arête commune supposée perpendiculaire au plan de la figure 11, le coupant au point A. Les miroirs font entre eux un petit angle² α dont la valeur réglable est de quelques minutes d'angle à quelques dizaines de minutes d'angle. La source primaire ponctuelle S, monochromatique, est située dans le plan de figure 11, supposé couper de manière symétrique le plan des miroirs. Cette source est située à la distance $AS = L$ de l'arête A. Un cache C (figure 11) ne permet pas que la lumière émise par S atteigne directement l'écran E.

L'indice du milieu de propagation est n . Nous supposons que les conditions de cohérence spatiale et temporelle sont vérifiées et nous ne les discuterons pas sur ce dispositif.

Donnons quelques valeurs typiques utilisées au laboratoire :

- dimensions des miroirs : 15 cm \times 10 cm ;
- distance D entre les miroirs et l'écran : supérieure à 2 m ;
- distance L entre la source primaire et les miroirs : 10 cm.

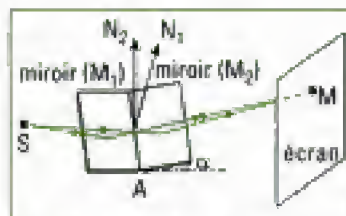


Fig. 10 – Dispositif des miroirs de Fresnel: vue schématique.

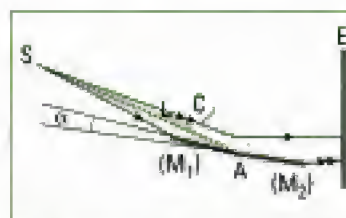


Fig. 11 – Dispositif des miroirs de Fresnel vu en coupe. Le cache C ne sera plus représenté dans les figures suivantes. α est l'angle entre les surfaces supérieures des deux miroirs, qui reçoivent la lumière.

B.1.2 – Position et nature des sources secondaires – Champ d'interférences

Une partie du faisceau issu de S éclaire le miroir M_1 et nous savons construire la marche d'un rayon lumineux qui s'y réfléchit. Le rayon réfléchi semble provenir de la source virtuelle S_1 symétrique de S par rapport au miroir M_1 (figure 12).

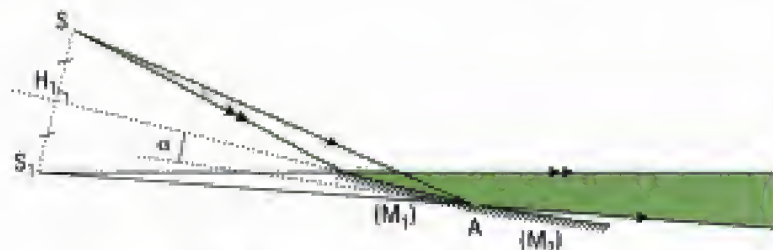


Fig. 12 – Réflexion sur le miroir M_1 : source secondaire S_1 .

De même, une autre partie du faisceau issue de S se réfléchit sur le miroir M_2 en semblant provenir de la source virtuelle S_2 , symétrique de S par rapport au miroir M_2 (figure 13).

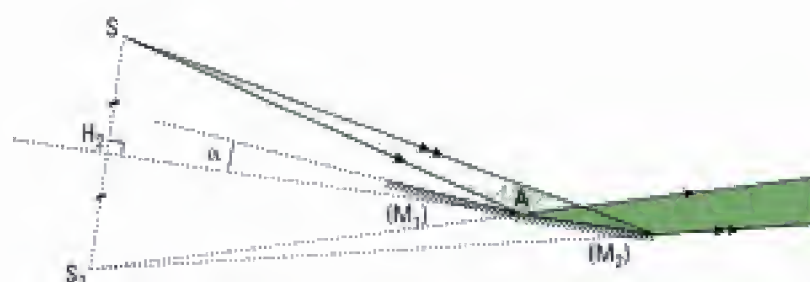


Fig. 13 – Réflexion sur le miroir M_2 : source secondaire S_2 .

Les sources secondaires S_1 et S_2 , images géométriques de la source S par rapport aux miroirs, sont des sources virtuelles cohérentes sans déphasage $\Delta\varphi_s$ à l'émission.

Là où les deux faisceaux réfléchis semblent issus de S_1 et S_2 se superposent, il y a interférences. Cette zone est représentée dans le plan de figure par le triangle AE_1E_2 mais se développe dans l'espace symétriquement par rapport au plan médiateur (SS_1S_2) (figure 14). La partie commune aux deux faisceaux peut avoir une dimension transversale limitée ou non.

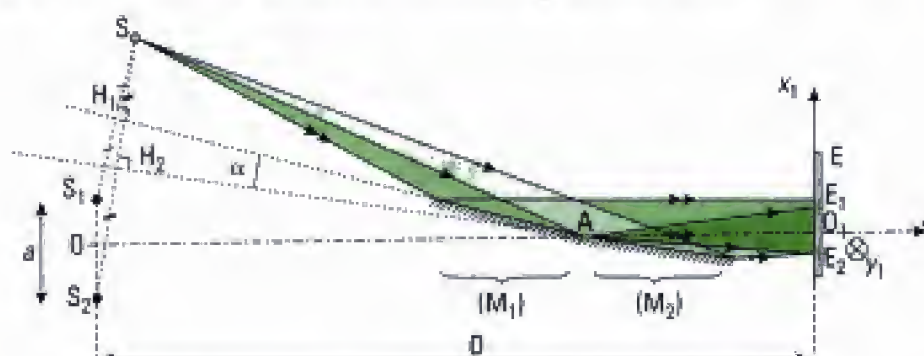


Fig. 14 – Réflexion sur les deux miroirs: champ d'interférences.

Les deux sources étant totalement cohérentes, nous pouvons observer les interférences sur tout écran placé dans le champ d'interférences: **les interférences obtenues avec les miroirs de Fresnel sont donc des interférences non localisées.**

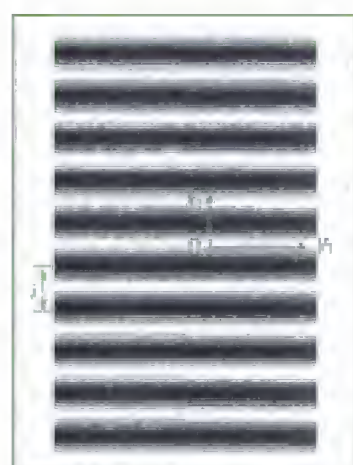


Fig. 15 – Franges rectilignes observées en utilisant le dispositif des miroirs de Fresnel (lumière du laser Hélium-Néon).

B.1.3 – Figures d'interférences

Nous reconnaissons dans l'analyse du dispositif des miroirs de Fresnel un interféromètre à deux ondes cohérentes, tel que celui étudié au paragraphe A.2. La géométrie des faisceaux émergents permet l'observation sur un écran E parallèle à la droite portant les sources, c'est-à-dire placé perpendiculairement à la médiatrice du segment S_1S_2 . Nous savons que les franges observées sur cet écran sont rectilignes, situées au voisinage du point O_1 , parallèles à O_1y_1 , d'interfrange :

$$i = \frac{\lambda_0 D}{na} = \frac{\lambda D}{a}$$

si le milieu est d'indice n .

Définissons un point O_1 , origine du repère sur l'écran, tel que O , milieu de S_1S_2 , A et O_1 soient alignés. La frange d'ordonnée $x_1 = 0$ est une frange brillante (figure 15)¹.

1. En effet, les sources secondaires S_1 et S_2 étant cohérentes et sans déphasage φ_s à l'émission, au point O , les ondes émises par ces sources secondaires sont en phase. Le déphasage supplémentaire de π étant identique sur chaque chemin optique, il s'annule par différence.

B.1.4 – Expression de l'interfrange en fonction des paramètres du montage

Par construction géométrique, AH_1 est la médiatrice de SS_1 (figure 14) ; ainsi, $AS = AS_1$. De même, $AS = AS_2$. Les points S , S_1 et S_2 sont donc sur un même cercle de centre A , de rayon L .

L'angle $\widehat{S_1SS_2}$ est égal à α puisque SS_1 et SS_2 sont perpendiculaires à deux droites qui font entre elles un angle α .

La propriété de l'angle au centre dans un cercle nous indique que l'arc $\widehat{S_1S_2}$ est sous-tendu par l'angle $\widehat{S_1SS_2}$ et par l'angle au centre $\widehat{S_1AS_2}$, donc $\widehat{S_1AS_2} = 2\alpha$.

Comme l'angle 2α est petit, l'arc $\widehat{S_1S_2}$ se confond quasiment avec la corde S_1S_2 . Ainsi, dans le triangle $\widehat{S_1AS_2}$, nous avons :

$$a = S_1S_2 \approx 2OA \cdot \alpha = 2L\alpha$$

La distance D du plan des sources secondaires S_1 et S_2 à l'écran s'exprime selon $D = OA + AO_1 \approx L + AO_1$, où AO_1 est la distance de l'arête commune des miroirs à l'écran d'observation. Nous avons donc¹ :

$$i = \frac{\lambda_0 D}{na} = \frac{\lambda_0 (L + AO_1)}{2nL\alpha}$$

1. Pour un réglage des miroirs de Fresnel, AO_1 , L et α étant fixés,

alors le rapport $\frac{i}{\lambda_0}$ est une

constante pour une radiation donnée. La mesure de l'interfrange pour une longueur d'onde connue permet de déterminer une longueur d'onde inconnue par mesure de son interfrange.

B.1.5 – Ordres de grandeur au laboratoire

$i = 3 \text{ mm}$; $L = 0,10 \text{ m}$; $O_1A = 2 \text{ m}$; $\lambda_0 = 600 \text{ nm}$ (jaune-orangé) ; $n \approx 1$. Nous en déduisons :

$$\alpha = \frac{\lambda_0 (L + AO_1)}{2Li} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ rad, soit } \alpha \approx 7' \text{ (angle très petit).}$$

Remarques

• Le dispositif des miroirs de Fresnel présente l'avantage de ne pas être basé sur la diffraction pour produire les deux sources secondaires, comme l'est celui des trous de Young abordé au chapitre 2. Ainsi, nous pouvons utiliser l'optique géométrique pour construire les rayons donnant le champ d'interférences et calculer la différence de marche $\delta(M)$ en un point M de ce champ (figure 17)² :

$$\delta(M) = (SI_2M) + \frac{\lambda_0}{2} - (SI_1M) - \frac{\lambda_0}{2} = (SI_2M) - (SI_1M)$$

Or, $(SI_1M) = (SI_1) + (I_1S_1) + (S_1M)$ et $(I_1S_1) = -(S_1I_1)$ puisque le sens de la lumière est ici de S_1 vers M . Comme par construction nous avons aussi $SI_1 = S_1I_1$, nous en déduisons que :

$$(SI_1M) = (SI_1) - (S_1I_1) + (S_1M) = (SI_1) - (SI_1) + (S_1M) = (S_1M).$$

De même, nous pouvons montrer que :

$$(SI_2M) = (S_2M).$$

Enfin, $\delta(M) = (S_2M) - (S_1M)$.

Un corollaire important de cette démonstration est que :

Entre un point source et son image dans un miroir, le chemin optique est nul.

La démonstration de ce résultat s'obtient par le fait que $(SI_1S_1S) = 0$ et donc que $(SI_1) + (I_1S_1) + (S_1S) = 0$; or, comme précédemment $(I_1S_1) = -(S_1I_1) = -(SI_1)$, et donc $(S_1S) = 0$.

2. On tient compte ici des déphasages de valeur π à la réflexion sur chaque miroir (cf. paragraphe F du chapitre 1).

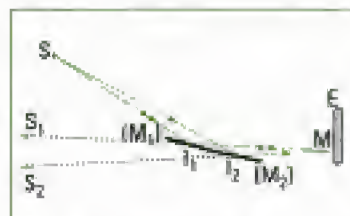


Fig. 17 – Expression de la différence de chemin optique le long de deux rayons qui interfèrent au point M .

1. Nous avons considéré le cas de deux ondes sphériques émises par S_1 et S_2 . Il est tout à fait possible d'éclairer les miroirs de Fresnel avec deux ondes planes. Les résultats sont alors ceux du paragraphe A.1.

• Nous pouvons améliorer le confort visuel sans diminuer la cohérence en remplaçant la source ponctuelle par une fine fente source parallèle à l'arête des miroirs (voir exercice 1). Le phénomène observé sera plus lumineux. L'élargissement de cette fente fait intervenir la notion de cohérence spatiale (voir exercice 2 et paragraphe C)¹.

B.2. Les trous ou les fentes de Young

Ce dispositif, qui a été rencontré au chapitre 2, peut être utilisé avec des fentes ou des trous, qu'ils soient source primaire ou secondaire. Donnons quelques valeurs typiques utilisées au laboratoire :

dispositif des trous ou fentes de Young	valeur typique	à partir de
diamètre des trous sur support	quelques dixièmes de mm	0,1 mm
largeur des fentes sur support	quelques dixièmes de mm	0,1 mm
longueur des fentes sur support	30 mm	
distance a entre les trous ou les fentes	1 mm	0,6 mm
distance D entre les trous ou fentes et l'écran	1 m	
distance d entre la source primaire et les trous ou fentes	de quelques dizaines de cm à 1 m	
largeur de la source primaire (fente réglable)	quelques dixièmes de mm	0,1 mm
dimension du champ d'interférences	quelques dizaines de mm	

2. À la différence des miroirs de Fresnel qui donnent ces deux sources secondaires par stigmatisme.



Fig. 18 – Interférences et diffraction par les trous de Young.

3. L'ouverture est ici celle du faisceau diffracté définie par le demi-angle au sommet du cône limitant le faisceau.

Au paragraphe A du chapitre 2, nous avons montré que ce dispositif est étroitement lié à la diffraction qui est à l'origine des sources secondaires S_1 et S_2 ². Comme indiqué précédemment, nous n'étudierons pas le phénomène de diffraction, qui sera abordé au chapitre 6 et nous nous contenterons de montrer les modifications qu'il apporte à la figure d'interférences. Nous nous intéresserons surtout au phénomène de bandes rectilignes alternativement sombres et claires, horizontales sur la figure 18, caractéristiques d'un phénomène d'interférences des ondes issues des sources S_1 et S_2 .

B.2.1 – Principe du dispositif

Une source lumineuse ponctuelle S monochromatique éclaire un écran opaque portant deux trous circulaires S_1 et S_2 identiques séparés par la distance a (figure 19). Les lois de la diffraction, que nous verrons au chapitre 6, nous indiquent que :

- chaque trou circulaire S_1 ou S_2 se comporte comme une source secondaire d'onde sphérique, de même fréquence que l'onde primaire et d'ouverture³ d'autant plus grande que le diamètre des trous est petit ;
- l'amplitude de l'onde secondaire émise par S_1 ou S_2 est proportionnelle à la surface du trou et à l'amplitude de l'onde issue de S arrivant sur le trou ;
- chaque onde secondaire émise par S_1 ou S_2 présente une différence de phase de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à l'onde issue de S et arrivant en S_1 ou S_2 .

Hypothèses :

L'interféromètre est placé dans un milieu d'indice n , la source S est sur la médiatrice de S_1S_2 ⁴ et les conditions de cohérences temporelle et spatiale sont vérifiées.

4. Cette hypothèse est bien sûr impossible à réaliser. Nous verrons en exercice les conséquences de ce fait.

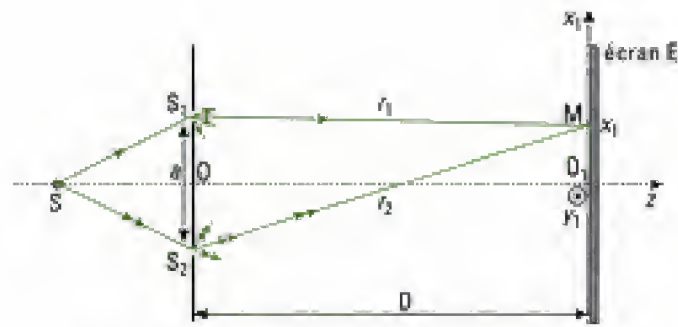


Fig. 19 – Dispositif interférentiel des trous de Young vu en coupe.

B.2.2 – Position et nature des sources secondaires – Champ d'interférences

D'après les hypothèses, nous pouvons conclure que les sources S_1 et S_2 sont réelles, cohérentes et en phase. Les interférences sont non localisées car elles existent dans l'espace où les faisceaux secondaires se recouvrent. La géométrie des faisceaux émergents permet seulement l'observation sur un écran E parallèle à l'axe des sources, placé dans le champ d'interférences.

B.2.3 – Expression de la différence de chemin optique pour un point M du champ d'interférences

Écrivons la différence de marche au point M¹ :

$$\delta(M) = (SS_2M) + \frac{\lambda_0}{4} - (SS_1M) - \frac{\lambda_0}{4}$$

Nous avons donc :

$$\delta(M) = (SS_2M) - (SS_1M) = (SS_2) + (S_2M) - (SS_1) - (S_1M).$$

Or par hypothèse, $(SS_2) = (SS_1)$ donc :

$$\delta(M) = (S_2M) - (S_1M).$$

La situation est alors celle rencontrée au paragraphe A.2, où deux ondes sphériques cohérentes émises par les sources secondaires interfèrent.

B.2.4 – Intensité lumineuse en un point de l'écran – Interfrange

Nous obtenons donc, en utilisant les résultats du paragraphe A.2 :

$$\delta(M) = (S_2M) - (S_1M) = n(r_2 - r_1) = \frac{na x_1}{D} ;$$

$$\Delta\varphi(M) = 2\pi \frac{na x_1}{\lambda_0 D} ; \quad I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(2\pi \frac{na x_1}{\lambda_0 D}\right).$$

$$I(M) = 2I_0 \left[1 + \cos\left(2\pi \frac{na x_1}{\lambda_0 D}\right) \right] \quad \text{avec } I_1 = I_2 = I_0.$$

Alors, avec $m \in \mathbb{Z}$:

$$x_{1mb} = m \frac{\lambda_0 D}{na} ; \quad x_{1m} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_0 D}{na} ; \quad i = \frac{\lambda_0 D}{na} = \frac{\lambda D}{a}.$$

1. En tenant compte de la différence de phase supplémentaire de valeur $\frac{\pi}{2}$

au passage de l'onde par un trou, qui se simplifie au final, puisqu'elle est égale sur chacun des chemins.

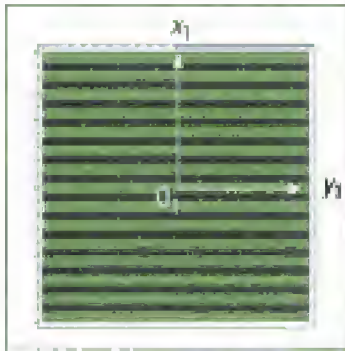


Fig. 20 – Franges rectilignes dues aux interférences.



Fig. 21 – Figure de diffraction d'un trou circulaire : tache d'Airy.

1. En toute rigueur, dans l'expérience des trous de Young, pour que les deux taches de diffraction créées par chacune des sources se superposent, il est nécessaire d'ajouter une lentille mince convergente juste derrière les trous diffractants. Dans la pratique, on place la lentille au voisinage de la position où l'on souhaite situer les trous de Young et l'on forme l'image de la source sur un écran. On place ensuite le dispositif de Young devant la lentille (cette configuration est une de celles dénommées « de Fraunhofer »). C'est sous cette forme que le dispositif de Young, un des rares dispositifs à division de front d'onde, est utilisé aujourd'hui, notamment en astronomie.

2. Dans le cas des fentes de Young, là encore, le phénomène d'interférences est modulé par le phénomène de diffraction dû aux fentes sources secondaires (voir figure 24 du chapitre 6).

B.2.5 – Surfaces d'égale intensité

Au voisinage de O_1 , les franges d'interférences, intersections des hyperboloïdes de foyers S_1 et S_2 , sont des hyperboles quasi-rectilignes, parallèles à $O_1 y_1$, d'ordonnées $x_1 = \text{cte}$ (figure 20).

Dans la pratique, l'intensité lumineuse I_0 sur l'écran, due à chaque source secondaire, n'est pas uniforme : il s'agit d'une image de diffraction par un trou, dont l'effet est de barrer la figure d'anneaux concentriques (figure 21).

La tache centrale de cette figure, appelée tache d'Airy, d'une très grande importance dans la conception des appareils d'optique, augmente lorsque le diamètre du trou diminue¹.

B.2.6 – Fente source primaire – Fentes de Young

Sans changer la nature de la figure d'interférences observée avec les trous de Young :

- le trou source primaire S peut être remplacé par une fente très fine éclairée, de direction parallèle à $O_1 y_1$ (figure 19). Les points sources de cette fente, incohérents entre eux, donnent en un point M le même état d'interférence. Les intensités s'ajoutent. Le phénomène d'interférences est plus lumineux ;
- les trous sources secondaires peuvent être remplacés par des fentes très fines parallèles à la fente source. Le phénomène d'interférences est plus lumineux².

B.2.7 – Déplacement de la source primaire (trou ou fente) parallèlement à la direction portant les sources secondaires

On considère le montage suivant :

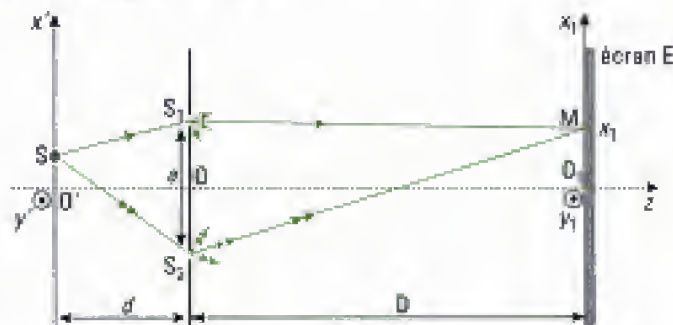


Fig. 22 – Déplacement de la source primaire le long de $O'x'$.

• Situation physique

La source S , précédemment située en O' , est maintenant placée à l'abscisse x' le long de l'axe $O'x'$ qui est parallèle à $S_1 S_2$ (figure 22). Nous notons d la distance OO' et nous supposons le milieu homogène et isotrope, d'indice n . Cherchons quelles sont les conséquences sur le phénomène d'interférences.

• Expression de la nouvelle différence de marche

La différence de marche entre les chemins $SS_1 M$ et $SS_2 M$ est maintenant :

$$\delta(M) = (SS_2 M) + \frac{\lambda_0}{4} - (SS_1 M) - \frac{\lambda_0}{4} = (SS_2) - (SS_1) + (S_2 M) - (S_1 M).$$

Hypothèses : $a \ll D$ et $|x'| \ll d$.

Avec l'hypothèse $a \ll D$, nous obtenons comme précédemment :

$$(S_2 M) - (S_1 M) = \frac{nax_1}{D}.$$

1. Le signe de x' traduit le fait que l'on peut avoir (SS_1) supérieur ou inférieur à (SS_2) . Dans l'exercice 3, question 2 du chapitre 2, l'algèbrisation a été menée en analysant physiquement les retards de phase, ce qui est une approche quelque peu différente mais qui conduit évidemment au même résultat.

2. Avec toujours $\lambda_y = n\lambda$.

3. Le cas de la diffraction et de la dépendance de I_0 en fonction de x_1 et y_1 sera vu au chapitre 6.

En remarquant que la situation du point S dans le triangle SS_1S_2 est comparable à celle du point M dans le triangle MS_1S_2 , nous pouvons écrire sans calcul que $(SS_2) - (SS_1) = \frac{na x'}{d}$ ¹. Ainsi :

$$\delta(M) = na \left(\frac{x_1}{D} + \frac{x'}{d} \right).$$

• **Intensité lumineuse**

L'intensité lumineuse en M s'écrit donc² :

$$I(M) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi a}{\lambda} \left(\frac{x_1}{D} + \frac{x'}{d} \right) \right) \right].$$

• **Surface d'égale intensité – Interfrange**

Nous ne nous intéressons qu'au phénomène d'interférences³. Les franges d'interférences sont encore des portions d'hyperboles réduites à des droites parallèles à O_1y_1 et situées au voisinage de O_1 . L'interfrange est inchangé :

$$i = \frac{\lambda D}{a}.$$

• **Position des franges sur l'écran**

Intéressons nous à la frange pour laquelle $\delta(M) = 0$, encore appelée frange centrale. En notant x_{1C} sa position sur l'écran, nous obtenons :

$$\left(\frac{x_{1C}}{D} + \frac{x'}{d} \right) = 0, \text{ soit : } x_{1C} = - \frac{D}{d} x'.$$

La frange centrale, et donc tout le système de franges, se déplace par translation de la quantité x_{1C} le long de l'axe O_1x_1 . Dans le cas envisagé sur la figure 22, $x_{1C} < 0$; le système de franges se translate vers le bas.

Nous pouvons comprendre physiquement le sens de ce déplacement puisque dans la translation de la source S, nous diminuons le chemin SS_1 et nous augmentons le chemin SS_2 .

Pour que l'état vibratoire d'une frange donnée reste le même, il est nécessaire que le chemin S_1M augmente et que le chemin S_2M diminue.

4. Cette source S peut être une ouverture éclairée par une source large.

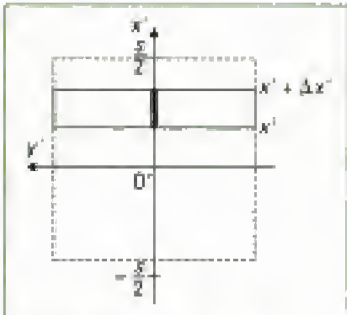


Fig. 23 – Élargissement de la source primaire dans la direction $O'x'$.

C. Trous ou fentes de Young éclairés par une source primaire étendue – Cohérence spatiale

• **Situation physique**

Les deux sources secondaires, trous ou fentes, sont maintenant éclairées par une source primaire S étendue⁴.

Hypothèses :

- la source étendue est composée de points lumineux incohérents entre eux ;
- la source primaire est symétrique par rapport à l'axe $O'y'$ et sa largeur est s (extension spatiale entre $-\frac{s}{2}$ et $+\frac{s}{2}$ le long de $O'x'$, figures 22 et 23) ;
- le milieu est homogène et isotrope d'indice n ;
- l'émission de lumière est uniforme sur toute l'étendue spatiale de la fente.

• Expression de l'intensité

Isolons par la pensée une bande de source primaire comprise entre les coordonnées x' et $x' + \Delta x'$. Si $\Delta x'$ est petit, ce que nous supposons, chaque bande joue comme précédemment le rôle d'une fente source et crée son propre système de franges dont l'intensité s'ajoute aux autres.

Avec l'hypothèse selon laquelle l'intensité lumineuse a pour valeur I_0 , dans l'un des deux chemins menant en un point M , l'intensité totale I , émise par la source dans ces deux chemins est $2I_0$. Il lui correspond, vu les hypo-

thèses, une répartition d'intensité $dI = 2I_0 \frac{\Delta x'}{s}$, l'intensité élémentaire d'une bande source transitant dans chaque bras étant donc :

$$dI = \frac{dI}{2} = I_0 \frac{\Delta x'}{s}.$$

Cette bande source va créer son propre système de franges d'interférences dont l'intensité au point M sera :

$$\begin{aligned} I_{(x', x' + \Delta x')}(M) &= 2I_0 \frac{\Delta x'}{s} [1 + \cos(\Delta\varphi(M))] \\ &= 2I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi a}{\lambda} \left(\frac{x_1}{D} + \frac{x'}{d}\right)\right) \right] \frac{\Delta x'}{s}. \end{aligned}$$

Les différentes bandes de sources primaires étant incohérentes entre elles, les intensités lumineuses correspondantes vont simplement s'additionner en M :

$$I(M) = \sum I_{(x', x' + \Delta x')}(M).$$

Par passage à la limite continue, nous obtenons :

$$I(M) = 2 \frac{I_0}{s} \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \left[1 + \cos\left[\frac{2\pi a}{\lambda} \left(\frac{x_1}{D} + \frac{x'}{d}\right)\right] \right] dx'$$

dont l'intégration donne :

$$\begin{aligned} I(M) &= 2 \frac{I_0}{s} \left[x' + \frac{\sin\left[\frac{2\pi a}{\lambda} \left(\frac{x_1}{D} + \frac{x'}{d}\right)\right]}{\frac{2\pi a}{\lambda d}} \right]_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \\ &= 2I_0 \left[1 + \frac{\sin\left[\frac{2\pi a}{\lambda} \left(\frac{x_1}{D} + \frac{s}{2d}\right)\right] - \sin\left[\frac{2\pi a}{\lambda} \left(\frac{x_1}{D} - \frac{s}{2d}\right)\right]}{\frac{2\pi a s}{\lambda d}} \right]. \end{aligned}$$

Soit après simplification² :

$$I(M) = 2I_0 \left[1 + \frac{\sin\left(\frac{\pi a s}{\lambda d}\right) \cos\left(\frac{2\pi a x_1}{\lambda D}\right)}{\frac{\pi a s}{\lambda d}} \right].$$

• Interprétation de l'expression de l'intensité

Nous retrouvons dans l'expression de l'intensité le terme $\cos\left(\frac{2\pi a x_1}{\lambda D}\right)$ propre aux interférences déjà observées avec les trous (ou fentes) de Young aux paragraphes précédents. L'interfrange s'écrit donc toujours $i = \frac{\lambda D}{a}$.

1. Avec $\Delta\varphi(M) = \frac{2\pi\delta(M)}{\lambda_0}$,

$\delta(M)$ ayant été établi au paragraphe 0.2.7.

2. En utilisant la relation :

$$\begin{aligned} \sin p - \sin q &= 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right). \end{aligned}$$

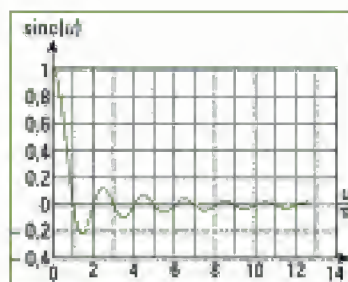


Fig. 24 – Tracé de $\text{sinc}(u)$ en fonction de $\frac{u}{\pi}$

1. Ce degré de cohérence spatiale est à mettre en parallèle avec l'expression :

$|\cos[(\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_1 - \varphi_2]|$, définie au paragraphe C.2. du chapitre 2 et qui joue le rôle de degré de cohérence temporelle noté $\gamma(\tau)$.

La fonction $\frac{\sin\left(\frac{\pi as}{\lambda d}\right)}{\frac{\pi as}{\lambda d}} = \frac{\sin(u)}{u}$ est la fonction mathématique «sinus cardinal

de u » notée $\text{sinc}(u)$, avec ici $u = \frac{\pi as}{\lambda d}$, telle que $\text{sinc}(0) = 1$ (figure 24).

Si $u \rightarrow 0$, alors $I(M) = 2I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi ax_1}{\lambda D}\right) \right]$. Nous retrouvons les résultats du paragraphe B.2.4, ce qui est normal puisque $u \rightarrow 0$ si $s \rightarrow 0$, ce qui correspond au cas d'une fente source primaire très fine.

Définition 1

La fonction $\gamma(s) = \frac{\sin\left(\frac{\pi as}{\lambda d}\right)}{\frac{\pi as}{\lambda d}}$, qui est un nombre algébrique, est appelée **degré de cohérence spatiale** de la source¹.

Nous avons donc :

$$I(M) = 2I_0 \left[1 + \gamma(s) \cos\left(\frac{2\pi ax_1}{\lambda D}\right) \right].$$

• Si $\gamma(s) > 0$

$I_{\max}(M) = 2I_0 [1 + \gamma(s)]$ pour $x_{\text{mb}} = m \frac{\lambda D}{a} = mi$ et $I_{\min}(M) = 2I_0 [1 - \gamma(s)]$

pour $x_{\text{mr}} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda D}{a} = \left(m + \frac{1}{2}\right)i$; $m \in \mathbb{Z}$. Le facteur de contraste (ou de visibilité) des interférences est alors :

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \gamma(s).$$

• Si $\gamma(s) < 0$

$I_{\max}(M) = 2I_0 [1 - \gamma(s)]$ pour $x_{\text{mb}} = \left(m + \frac{1}{2}\right)i$ et $I_{\min}(M) = 2I_0 [1 + \gamma(s)]$ pour $x_{\text{mr}} = mi$. Le facteur de contraste est alors³ :

$$C = -\gamma(s).$$

3. Comme le facteur de contraste C est positif, nous écrirons $C = |\gamma(s)|$.

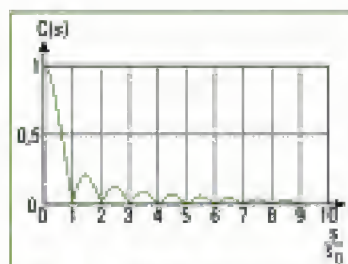


Fig. 25 – Tracé de $C(s)$ en fonction de $\frac{s}{s_0}$

Nous remarquons que dans le second cas, les nouvelles franges brillantes ont pris la place des anciennes franges sombres. Cette situation est qualifiée d'**inversion de contraste**.

• **Que se passe-t-il lorsque l'on ouvre progressivement la fente ?**

Le facteur de contraste et le degré de cohérence spatiale parcourent alors les courbes des figures 24 et 25.

• Si $s = 0$, $C = 1$, car $u = 0$, le contraste est maximal, la cohérence spatiale est complète; on observe parfaitement les interférences qui sont contrastées (figure 26a). Ce contraste diminue progressivement lorsque l'on continue à ouvrir la fente (figures 26b et 26c).

1. En terme de grandeur complexe, ce signe moins se traduit par un déphasage de π .

• Si s augmente encore, le facteur de contraste devient nul pour $u = \pi$, c'est-à-dire pour la valeur particulière $s_0 = \frac{\lambda d}{a}$: les interférences disparaissent ; il y a brouillage (figure 26d).

• Si s augmente encore, u appartenant à l'intervalle $]\pi; 2\pi[$, le contraste augmente (figure 25) pour diminuer ensuite. Les valeurs petites, mais non nulles, de $\gamma(s)$ permettent d'observer encore les interférences avec un très faible contraste, mais le degré de cohérence négatif indique une inversion de contraste (figure 26e)¹.

En augmentant encore la largeur de la fente, pour $u = 2\pi$, ou $s = 2s_0$, il y a disparition des franges et perte de cohérence. Au-delà, le facteur de contraste est si petit que l'œil ne distingue plus les interférences.

Au terme de ce paragraphe concernant la cohérence spatiale, nous pourrions être tenté de réduire la largeur de la source pour améliorer la vision des figures d'interférences. Cependant, si l'on diminue la largeur de la source, on améliore le contraste mais on diminue l'intensité lumineuse !

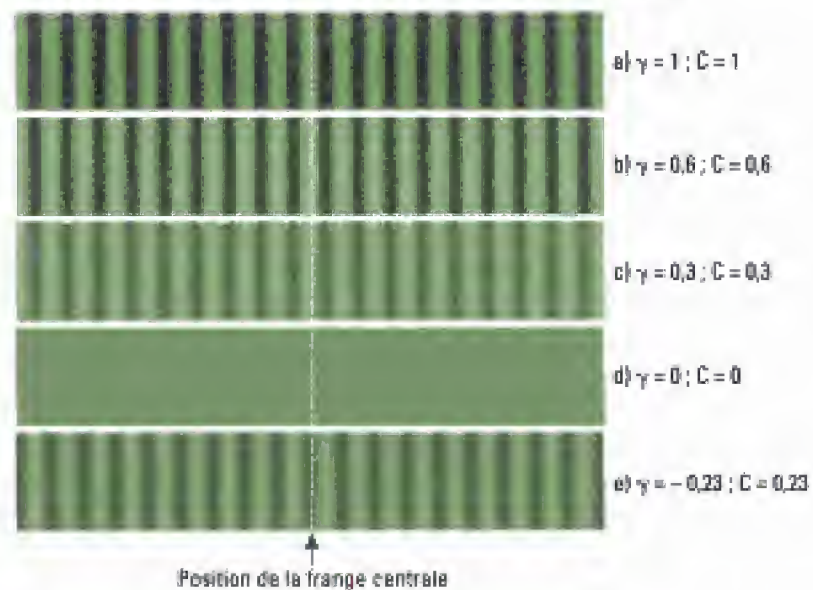


Fig. 26 – Évolution du degré de cohérence temporelle et du facteur de contraste lorsqu'on ouvre progressivement la fente source primaire.

• Critère de brouillage

La valeur de la largeur de fente $s_0 = \frac{\lambda d}{a}$ qui brouille les interférences peut se retrouver par le raisonnement suivant :

soient deux points de la source primaire, séparés d'une distance x' que l'on fait augmenter jusqu'à ce que leurs systèmes de franges soient séparés d'un demi interfrange $\frac{i}{2}$ sur l'écran. Dans ce cas, il y a brouillage des franges,

comme nous pouvons le voir sur la figure 27. Pour balayer toute la fente avec des couples de points dans une telle situation, il suffit de prendre $x' = \frac{s}{2}$.

En utilisant le théorème de Thalès et en raisonnant sur les franges centrales, nous obtenons alors (figure 22) :

$$\frac{x'}{d} = \frac{i}{D} = \frac{\frac{\lambda D}{2a}}{D} = \frac{\lambda}{2a} \text{ et } \frac{x'}{d} = \frac{s}{2d},$$

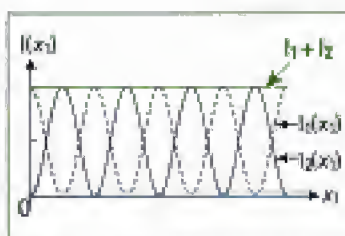


Fig. 27 – Éclairement uniforme ($l_1 + l_2$) de l'écran par superposition de deux systèmes de franges décalées spatialement d'une moitié d'interfrange.

En appelant s_0 cette valeur particulière de s , nous obtenons $s_0 = \frac{\lambda d}{a}$, qui est bien l'expression établie précédemment.

• Critère de visibilité des franges

Les franges seront bien visibles si $s \ll s_0$, soit :

$$s \ll \frac{\lambda d}{a}$$

Si $\lambda = 1$; $a = 0,6$ mm ; $d = 1$ m ; $\lambda_0 = 600$ nm, alors $s \ll 1$ mm.

Une autre façon d'exprimer ce critère consiste à dire que la variation de la différence de marche entre les points extrêmes de la source doit être beaucoup plus petite que la longueur d'onde :

$$\Delta(\delta(M)) \ll \lambda$$

$$\text{Or, } \Delta(\delta(M)) = \Delta \left[a \left(\frac{x_1}{D} + \frac{x'}{d} \right) \right] = \frac{a \Delta x'}{d} \text{ avec } \Delta x' = s.$$

$$\text{Donc } \frac{as}{d} \ll \lambda \text{ et } s \ll \frac{\lambda d}{a}.$$

Lors de l'utilisation des fentes de Young, pour que les interférences conservent un bon facteur de contraste, il est nécessaire que la fente source primaire soit très fine. Il en est ainsi pour les dispositifs à division de front d'onde qui donnent des interférences non localisées, contrastées si la source primaire est très fine.

• Cohérence temporelle de la source primaire

Comme nous l'avons montré au chapitre 1, la cohérence temporelle de la source est liée à sa largeur spectrale. Dans ce chapitre, nous avons considéré les sources monochromatiques, c'est-à-dire sans étendue spectrale, ce qui est une modélisation. Nous verrons les conséquences de la prise en compte de la réalité temporelle des sources dans le chapitre suivant.

Enfin, la lumière blanche, avec son spectre riche en fréquences, donne avec ces dispositifs interférentiels des interférences colorées dont on peut comprendre qualitativement l'origine.

L'interfrange étant proportionnel à la longueur d'onde, chaque radiation associée à une longueur d'onde crée son propre système de franges. Cependant, pour un interféromètre n'introduisant pas de déphasage supplémentaire autre que celui géométrique, ou dont les déphasages supplémentaires se compensent (miroirs de Fresnel), la frange centrale de la figure d'interférences est blanche (ou claire) car en ce lieu $\delta(M) = 0$ quelle que soit la longueur d'onde. Les raies colorées qui se succèdent dans le champ d'interférences peuvent donc s'expliquer par la valeur différente d'interfrange due aux figures d'interférences de chacune des radiations (figure 28).

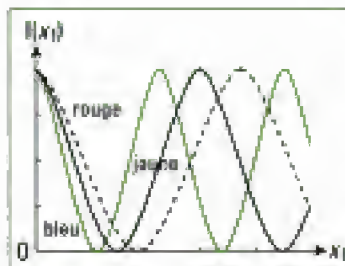


Fig. 28 – Tracé de $I(x)$ pour les radiations bleue, jaune et rouge.

L'essentiel

✓ Interférences de deux ondes planes

- Pour deux ondes planes totalement cohérentes, de vecteurs d'onde \vec{k}_1 et \vec{k}_2 faisant entre eux l'angle α , $(\vec{k}_1 + \vec{k}_2)$ définissant une direction Ox du plan xOy contenant \vec{k}_1 et \vec{k}_2 , l'intensité lumineuse s'écrit :

$$I = 2I_0 \left[1 + \cos \left(2\pi \frac{y}{i} + \Delta \varphi_s \right) \right],$$

- i est l'interfrange qui repère la périodicité spatiale du phénomène d'interférences le long de l'axe Oy, défini par :

$$i = \frac{\lambda_0}{2n \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right)}.$$

✓ Interférences de deux ondes sphériques

• Intensité lumineuse

Si S_1 et S_2 sont des points sources d'ondes sphériques totalement cohérentes situés aux distances r_1 et r_2 d'un point M où elles se superposent, loin des sources l'intensité lumineuse peut se mettre sous la forme :

$$I(M) = 2I_0 [1 + \cos[k(r_2 - r_1) + \Delta \varphi_s]]$$

avec $k = \frac{2\pi n}{\lambda_0}$ et I_0 l'intensité due à chaque source.

• Franges d'interférences

Les franges d'interférences, telles que $r_2 - r_1 = \text{cte}$, sont des hyperboloïdes de révolution de foyers S_1 et S_2 .

Premier cas : sur un écran $(O_1 x_1 y_1)$ parallèle à la droite portant les sources S_1 et S_2 , avec $(O_1 x_1)$ parallèle à $S_1 S_2$, au voisinage du point O_1 l'intensité s'écrit :

$$I(M) = I(x_1) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(2\pi \frac{x_1}{i} \right) \right] \text{ avec l'interfrange } i = \frac{\lambda_0 D}{na}$$

a représente la distance $S_1 S_2$ et D la distance entre la droite portant les sources et l'écran.

Au voisinage au point O_1 , les franges d'interférences sont des droites parallèles à l'axe $O_1 y_1$.

Deuxième cas : sur un écran $(O_2 x_2 y_2)$ perpendiculaire à la droite portant les sources S_1 et S_2 , l'intensité s'écrit :

$$I(M) = I(\rho) = 2I_0 \left[1 + \cos \left[2\pi \frac{na}{\lambda_0} \left(1 - \frac{\rho^2}{2D^2} \right) + \Delta \varphi_s \right] \right]$$

avec a la distance entre les deux sources, D la distance entre le point milieu de $S_1 S_2$ et l'écran, et $\rho = O_2 M$.

Sur cet écran, les franges d'interférences sont des anneaux de centre O_2 de rayons :

$$\rho_m = \sqrt{2D^2 \left(1 - m \frac{\lambda_0}{na} \right)}.$$

✓ Dispositif des miroirs de Fresnel

Ce dispositif, d'arête A , qui donne d'une source primaire S deux sources secondaires S_1 et S_2 , produit des interférences conformes à ce que prévoient les résultats précédents, si ce n'est que les franges circulaires ne sont pas observables.

Dans le cas d'ondes sphériques, au voisinage du point O_1 , l'intensité sur l'écran s'écrit :

$$I(M) = I(x_1) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(2\pi \frac{x_1}{i} \right) \right],$$

avec l'interfrange $i = \frac{\lambda_0 D}{na} = \frac{\lambda_0 (L + AO_1)}{2nL\alpha}$, a représentant la distance $S_1 S_2$ et $L = AS$.

Au voisinage du point O_1 , les franges d'interférences sont des droites parallèles à l'axe $O_1 y_1$.

✓ Dispositif des trous ou fentes de Young

Ce dispositif à deux sources secondaires S_1 et S_2 conduit aux mêmes résultats que les miroirs de Fresnel, si l'on ne prend pas en compte l'influence de la diffraction.

✓ Influence de la cohérence spatiale de la source sur ces dispositifs

Si la fente source primaire, située à la distance d des fentes sources secondaires, a une largeur s , l'intensité sur l'écran se réécrit selon :

$$I(M) = 2I_0 \left[1 + \gamma(s) \cos \left(\frac{2\pi a x_1}{\lambda D} \right) \right],$$

$\gamma(s) = \frac{\sin \left(\frac{\pi a s}{\lambda d} \right)}{\frac{\pi a s}{\lambda d}}$ est le degré de cohérence spatiale de la source.

Si l'on ouvre progressivement la source, le contraste des figures d'interférences diminue jusqu'à s'annuler lorsque la source a une largeur s_0 égale à $\frac{\lambda d}{a}$. Ensuite, on observe une inversion du contraste de la figure d'interférences.

Mise en œuvre

Méthode n°1

Comment étudier les interférences à deux ondes sphériques ?

On souhaite dégager une méthode d'étude des dispositifs à interférences non localisées éclairés par une onde sphérique (le cas particulier des ondes planes est abordé en Méthode n° 2).

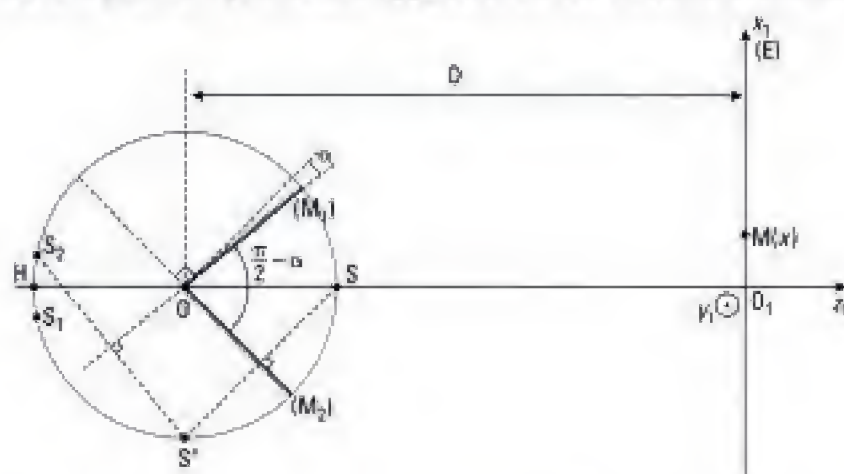
→ Savoir faire

- ❶ Il faut commencer par rechercher s'il est possible de définir deux sources secondaires S_1 et S_2 , issues de la division de l'onde dans les deux bras du diviseur d'ondes dont l'étude théorique a été menée dans le cours. Dans l'affirmative, tous les résultats vus en cours peuvent être transposés (au besoin l'énoncé ou l'examinateur demandant de démontrer à nouveau ces résultats). Penser à tenir compte de l'indice de réfraction n si le milieu n'est pas assimilable au vide.

- ② Déterminer les grandeurs demandées dans le problème posé : intensité lumineuse, interférence, forme des franges d'interférences, ...
- ③ Se questionner sur le contenu physique de la solution obtenue en envisageant les modifications apportées au champ d'interférences si certains paramètres du problème sont modifiés.

→ Application

On reprend le dispositif interférentiel étudié dans la méthode n° 2 du chapitre 2. On rappelle la représentation dans le plan de figure faisant apparaître les deux sources secondaires S_1 et S_2 :



$\frac{\pi}{2} - \alpha$ est l'angle existant entre les deux miroirs, avec α petit. L'écran (E), perpendiculaire au plan bissecteur du dièdre formé par les deux miroirs, est suffisamment éloigné de la source S. Cette source monochromatique, de longueur d'onde λ , est à la distance d du point O. Le milieu de propagation est l'air, dont l'indice est pris égal à 1.

Déterminer la différence de marche $\delta(M)$ en un point M d'abscisse x sur l'écran en fonction de d , D , x et α puis en déduire l'expression de l'intensité lumineuse en ce point.

Solution

- ① Dans ce cas, il existe deux sources secondaires clairement identifiées. Nous utilisons les résultats donnés dans le cours sachant que l'écran (E) est placé parallèlement à la droite portant les sources S_1 et S_2 . Au voisinage du point O_1 , on doit observer des franges rectilignes et dans ce cas parallèles à O_1P_1 . La différence de marche δ au point M s'écrit par ailleurs, puisque $n = 1$:

$$\delta(M) = \frac{S_1 S_2 x}{O_1 H}$$

(la différence de marche supplémentaire $\frac{\lambda_0}{2}$ due à la réflexion sur les miroirs se produit dans les deux bras de l'interféromètre et donc n'apparaît pas dans le résultat final donnant δ).

Il faut alors exprimer $S_1 S_2$ et $O_1 H$. Pour $O_1 H$, on remarque que S , S_1 et S_2 sont situées sur un même cercle de centre O et de rayon $OS = d$. Ainsi, on a $O_1 H = D + d$.

Pour exprimer $S_1 S_2$, il faut commencer par déterminer l'angle $\widehat{S_1 O S_2}$. À cet effet, on remarque que si (M_1) était perpendiculaire à (M_2) , il donnerait de S'' une image S_2 située en H. (M_1) étant tourné de α à partir de cette situation, l'image S_2 de S'' est telle que $\widehat{H O S_2} = 2\alpha$. On en déduit alors $S_1 S_2$:

$$S_1 S_2 \approx 4 d \alpha \text{ car l'angle } \alpha \text{ est supposé petit.}$$

Ainsi :

$$\delta(M) = \frac{4 d \alpha x}{D + d}.$$

- ② On en déduit l'expression de l'intensité lumineuse au point M d'abscisse x sur (E) :

$$I(x) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{4d\alpha x}{D+d} \right) \right].$$

- ③ Nous pouvons étudier les deux cas particuliers suivants :

- si x tend vers 0 : $\delta(M)$ tend vers 0 ce qui est cohérent puisque le point M est alors situé au point O_1 qui se trouve à égale distance des deux sources secondaires. La différence de chemin optique est donc nulle comme il se doit ;
- si x tend vers l'infini : $\delta(M)$ tend vers l'infini ce qui de prime abord est physiquement absurde car au contraire les chemins optiques ($S_1 M$) et ($S_2 M$) devraient alors être très voisins. En fait, ce cas limite n'existe pas car le champ d'interférences est de dimension finie dans le plan de l'écran (E) et donc x ne peut pas physiquement tendre vers l'infini !

Méthode n°2

Comment étudier les interférences à deux ondes planes ?

On souhaite dégager une méthode d'étude des dispositifs à interférences non localisées éclairés par une onde plane.

→ Savoir faire

- ① Il faut commencer par représenter la marche des rayons lumineux à la traversée du diviseur d'ondes planes pour identifier le champ d'interférences (on ne fait pas apparaître les sources secondaires qui sont situées en ce cas à l'infini).
- ② Il faut ensuite exprimer les deux vecteurs d'ondes \vec{k}_1 et \vec{k}_2 associés à chaque onde plane. En pratique, le repère d'étude est cartésien, ce qui revient à déterminer les projections des deux vecteurs d'ondes dans le repère défini par le problème étudié.
- ③ Identifier le point O de l'espace où les deux ondes planes sont en phase.
- ④ En déduire la différence de phase des ondes qui interfèrent au point M sous la forme :

$$\Delta\varphi(M) = (\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{OM}.$$
- ⑤ Déterminer les grandeurs demandées dans le problème posé : intensité lumineuse, interfrange, la forme des franges d'interférences, ...
- ⑥ Se questionner sur le contenu physique de la solution obtenue en envisageant les modifications apportées au champ d'interférences si certains paramètres du problème sont modifiés.

→ Application

Un faisceau de lumière parallèle monochromatique de longueur d'onde λ_0 , se propageant dans l'air d'indice $n = 1$, arrive en incidence normale sur un dispositif composé d'un prisme accolé par sa base à une lame à faces parallèles, transparent et de même indice de réfraction :

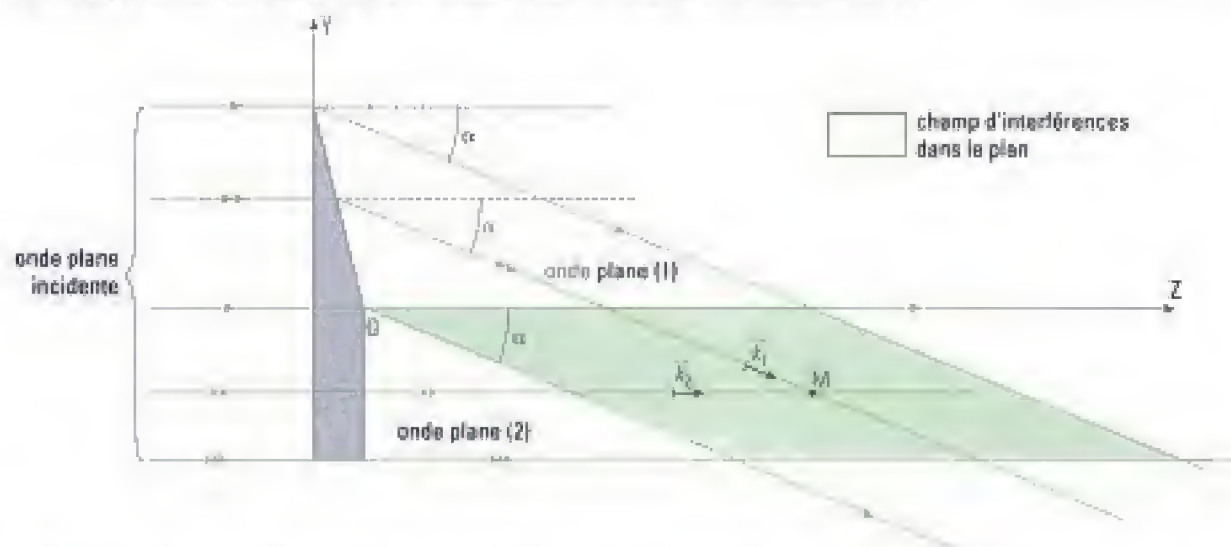
On note α la déviation angulaire des rayons lumineux à la traversée du prisme. Mettre en évidence le champ d'interférences puis déterminer la différence de marche $\delta(M)$ en tout point M du champ d'interférences.



Solution

- ① Commençons par mettre en évidence le champ d'interférences (méthode n° 1 du chapitre 2). Le prisme constitue ici le premier bras du diviseur d'ondes. Les rayons qui traversent le prisme ne sont pas déviés sur la face d'entrée (l'incidence est normale) et subissent donc par hypothèse une déviation angulaire α sur la face de sortie.

Quant aux rayons qui traversent la lame à faces parallèles (le deuxième bras du diviseur d'ondes), ils ne sont pas déviés. Ainsi, dans le plan de la feuille, on a :



- ② Dans le repère lié aux axes Y et Z, nous pouvons déterminer les composantes des vecteurs d'ondes \vec{k}_1 et \vec{k}_2 associés respectivement aux ondes (1) et (2) qui interfèrent :

$$\vec{k}_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0} (\cos \alpha \cdot \vec{e}_z - \sin \alpha \cdot \vec{e}_y) \text{ et } \vec{k}_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \vec{e}_z.$$

- ③ Le point de l'espace où les deux ondes planes sont en phase est ici le point O puisque (1) et (2) sont issues de la même onde incidente et qu'elles parcourent le même chemin optique. Nous prendrons le point O comme origine du repère cartésien lié aux axes Y et Z.

- ④ On en déduit la différence de phase des ondes planes qui interfèrent, en notant y et z les coordonnées du point M dans OYZ :

$$\Delta\varphi(M) = (\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{2\pi}{\lambda_0} [\sin \alpha \cdot y + (1 - \cos \alpha) z].$$

- ⑤ Il faut ici déterminer la différence de marche δ :

$$\delta(M) = \frac{\Delta\varphi(M)}{\frac{2\pi}{\lambda_0}} = \sin \alpha \cdot y + (1 - \cos \alpha) z.$$

- ⑥ Nous pouvons indiquer quelle serait la forme de la figure d'interférences observable sur un écran placé dans le champ d'interférences, par exemple perpendiculairement à l'axe OZ. Dans ce cas, $z = \text{cte}$ et la quantité $(1 - \cos \alpha) z$ est alors constante. Le lieu des points pour lesquels on a $\delta(M)$ constante est donc défini par l'équation : $y = \text{cte}$. Les franges d'interférences sont des droites parallèles entre elles et dirigées selon l'axe OX perpendiculaire au plan de la feuille.

Exercices

Niveau 1

Ex. 1 Miroirs de Fresnel

Une fente source S émet une lumière monochromatique ($\lambda = 0,5 \mu\text{m}$) parallèlement à l'arête commune Δ de deux miroirs formant entre eux un angle très petit :



La distance $S\Delta$ est $R = 0,5 \text{ m}$. Les images S_1 et S_2 de S dans les miroirs constituent deux sources cohérentes donnant sur un écran E placé à la distance $L = 1 \text{ m}$ de Δ un système de franges d'interférences. L'angle des deux miroirs est $\theta = 2$ minutes d'arc.

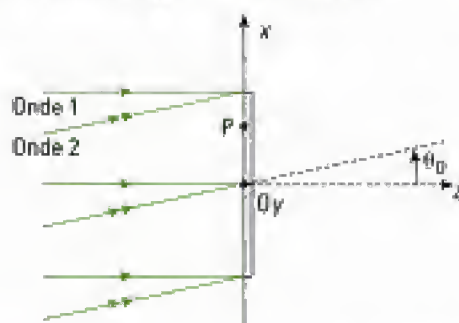
- 1) Calculer la distance $a = S_1S_2$.
- 2) Calculer l'interfrange i .
- 3) Interpréter la situation où $R \rightarrow \infty$ (source très éloignée).

Écrit, ESTP-ENSAM, MP; 2^e épreuve, 1998

Ex. 2 Interférence de deux ondes planes

On réalise, dans l'air, l'interférence de deux ondes monochromatiques, planes, cohérentes, de même amplitude A_0 et de même phase nulle en O (voir figure) ; la première, de direction Oz , tombe normalement sur un écran d'observation Oxy et la seconde fait l'angle $\theta_0 = 3^\circ$ avec la direction de la première. La longueur d'onde commune est $\lambda = 632,8 \text{ nm}$.

- 1) Écrire les expressions des amplitudes complexes ψ_1 et ψ_2 des deux ondes en un point P du plan Oxy .
- 2) En déduire la répartition de l'éclairement dans ce plan, la géométrie des franges d'interférence et la valeur de l'interfrange en fonction de λ et de θ . Calculer l'interfrange en micromètres.

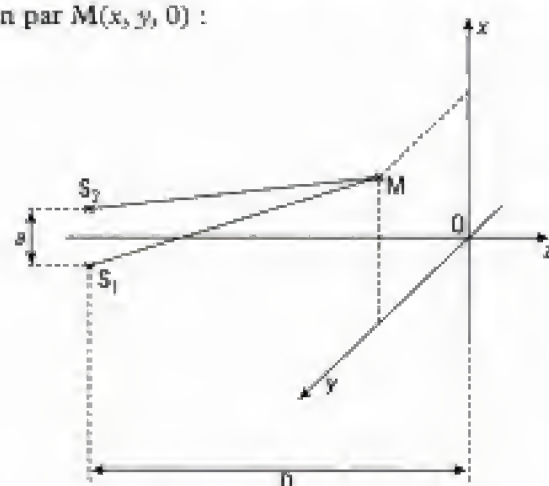


Écrit, CCP; MP; 1999

Ex. 3 Dispositif des trous d'Young

Une source ponctuelle éclaire un écran opaque percé de deux trous S_1 et S_2 supposés identiques et de très faibles dimensions. Les trous S_1 et S_2 sont repérés dans l'espace par leurs coordonnées $S_1 \left(-\frac{a}{2}, 0, -D \right)$

et $S_2 \left(+\frac{a}{2}, 0, -D \right)$ et le point M de l'écran d'observation par $M(x, y, 0)$:



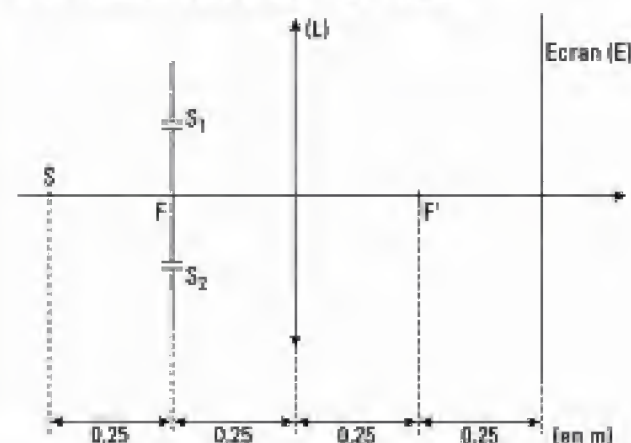
L'écran est situé à la distance $D \gg x$, $D \gg y$, et $D \gg a$. L'ensemble est placé dans l'air, d'indice $n = 1$.

- 1) Établir l'expression du chemin optique (S_1M) en fonction de x, y, a et D .
- 2) Compte tenu des approximations, exprimer au premier ordre la différence de marche $\delta = (S_1M) - (S_2M)$ en un point M de l'écran en fonction de a, x et D .
- 3) Préciser l'allure des franges observées sur l'écran.
- 4) Définir et établir l'expression de l'interfrange du système d'interférences.

D'après écrit E4A, 2003

Ex. 4 Interférences créées par 2 fentes fines

Deux fentes sources identiques et très fines S_1 et S_2 sont utilisées dans le montage suivant :



On donne: $S_1 S_2 = 0,6 \text{ cm}$ et $\lambda = 0,6 \mu\text{m}$.

F et F' sont les foyers de (L).

Étudier les interférences et calculer l'interfrange sur (E).

Oral, CCG, PSI, 1997

Ex. 5 Déplacement de la fente source dans le dispositif de Young

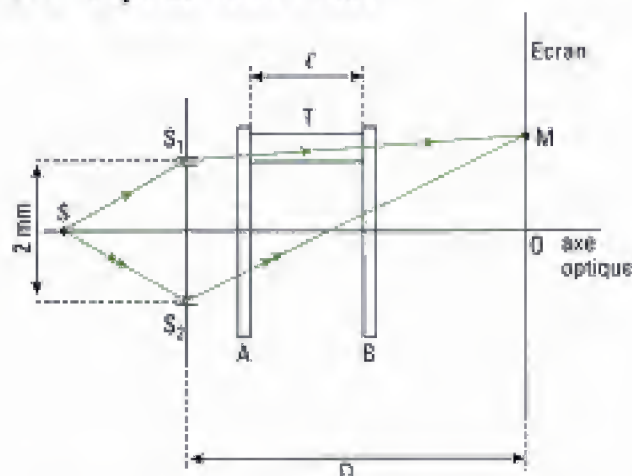
1) Faire un schéma du montage expérimental des fentes de Young, dont la figure d'interférence est observée dans le plan focal d'une lentille de projection. Quel est l'intérêt de cette lentille ?

2) La fente source est déplacée parallèlement à elle-même, dans un plan vertical et vers le bas. Qu'observe-t-on ?

Oral, Centrale-Supélec, PSI, 1999

Niveau 2

Ex. 6 Expérience de Fizeau



Une fente fine S éclaire deux fentes fines S_1 et S_2 , parallèles entre elles et à S, écartées de 2 mm et distantes de $D = 2 \text{ m}$ d'un écran.

A et B sont deux lames planes parallèles transparentes et traversées par les rayons issus de S_1 et S_2 . T est un tube initialement rempli d'air, de longueur $\ell = 20 \text{ cm}$ et fermé par A et B. La longueur d'onde, dans le vide, de la lumière monochromatique émise depuis S est:

$$\lambda_0 = 0,5893 \mu\text{m}.$$

1) Calculer l'interfrange observable sur l'écran.

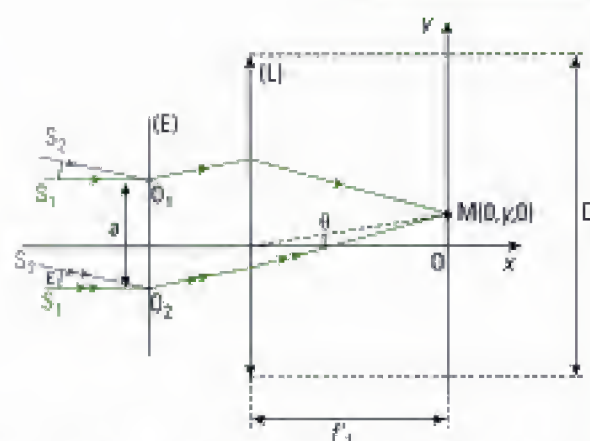
2) a) On fait le vide dans T. Que se passe-t-il ?

b) On observe un défilement de 99 franges lumineuses et, en fin d'expérience, une frange sombre en O. En déduire l'indice n de l'air et recalculer l'interfrange.

Oral, CCG, PC, 1999

Ex. 7 Résolution angulaire d'une étoile double

Pour mesurer la distance angulaire ε séparant deux étoiles proches S_1 et S_2 , on utilise le dispositif représenté ci-après.



Deux fentes infiniment fines O_1 et O_2 , transparentes, identiques et percées dans un écran (E) opaque, sont placées devant une lentille convergente (L) de focale f'_1 et de diamètre D. L'observation est faite dans le plan focal image de (L).

On considère que S_1 est sur l'axe optique et on note ε l'écart angulaire entre les deux sources S_1 et S_2 , incohérentes entre elles.

1) Montrer que l'intensité lumineuse due aux deux sources S_1 et S_2 observées simultanément peut se mettre sous la forme :

$$I(y) = K \left[1 + \cos\left(\frac{\pi \delta'}{\lambda}\right) \cos\left(2\pi \frac{\delta}{\lambda} + \pi \frac{\delta'}{\lambda}\right) \right]$$

avec $\delta' = a\varepsilon$, $\delta = a \frac{y}{f'_1}$ et K une constante.

2) On caractérise le contraste par le facteur de visibilité des franges $V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$.

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

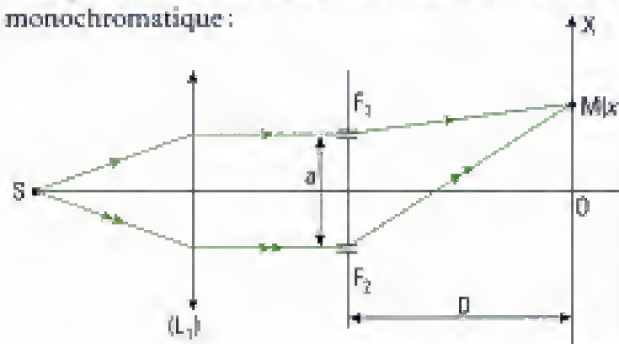
Établir son expression en fonction de δ' et λ .

3) Sur quel paramètre peut-on agir pour obtenir $V = 0$? Qu'observe-t-on lorsque $V = 0$? Avec la lunette étudiée ($D = 60 \text{ mm}$, $\lambda = 550 \text{ nm}$), peut-on séparer les systèmes doubles suivants : ξ Hercule ($\varepsilon = 1,37$ secondes d'angle), 85 Pégase ($\varepsilon = 0,83$ secondes d'angle) ?

D'après écrit ESIM PSI Physique 1, 2000

Ex. 8 Mesure de l'épaisseur d'une lame de verre

On considère le dispositif des fentes très fines de Young éclairé en incidence normale par une onde monochromatique :



On donne: $a = 4 \text{ mm}$; $D = 3 \text{ m}$; $\lambda = 589 \text{ nm}$.

1) Exprimer la différence de marche en un point M de l'écran. Déterminer l'interfrange et l'éclairement de l'écran.

2) On ajoute une lame à faces parallèles d'indice $n = 1,4$ et d'épaisseur e à la sortie de (L_1) sur le trajet et perpendiculairement au rayon qui atteint la fente F_2 .

Dans quel sens ont défilé les franges ? Calculer e si elles ont défilé sur 3 cm . Combien de franges ont défilé ?

Oral, TPE, PC, 2001

Ex. 9 Et si la lame de verre est inclinée ?

On reprend l'exercice précédent où une lame à faces parallèles, d'épaisseur e et d'indice n , est interposée entre la fente F_2 et la lentille (L_1) .

On suppose maintenant que la lame est inclinée d'un petit angle α par rapport à la verticale. De plus, on ajoute une seconde lentille (L_2) entre le plan des fentes et l'écran.

1) Donner l'expression de l'éclairement dans le plan focal de la lentille de projection (L_2) .

2) Quel angle minimal peut-on mesurer sachant que l'on peut détecter au minimum une variation de un dixième d'ordre d'interférence lorsque $e = 14 \cdot 10^{-3} \text{ m}$?

Oral, Mines-Ponts, MP, 2003

Ex. 10 Miroirs de Fresnel en lumière parallèle

Une source ponctuelle S monochromatique, de longueur d'onde λ , est placée au foyer d'une lentille (L) dont l'axe optique, contenu dans le plan de figure, est dirigé vers le point O appartenant à l'arête commune des deux miroirs. Celle-ci est perpendiculaire au plan de figure :



Le faisceau lumineux issu de (L) éclaire la surface des deux miroirs supposés identiques.

1) Préciser la nature des ondes qui interfèrent.

2) Les interférences sont-elles localisées ?

3) Exprimer le déphasage des ondes qui interfèrent en un point M du champ d'interférences. On introduira à cet effet un repère (OXY) centré en O et dont les axes (OX) et (OY) situés dans le plan de figure seront à préciser.

4) a) Exprimer l'intensité lumineuse du point M .

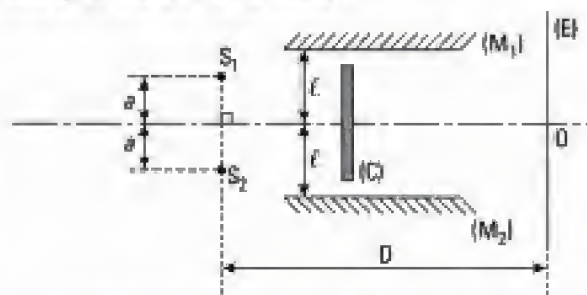
b) Préciser la nature des surfaces d'égale intensité.

5) Déterminer l'interfrange.

Niveau 3

Ex. 11 Interféromètre à deux miroirs parallèles

Dans le montage représenté ci-dessous, S_1 et S_2 sont deux sources ponctuelles. Deux miroirs (M_1) et (M_2) sont parallèles et horizontaux. Un cache opaque (C) élimine toute la lumière directe qui pourrait parvenir sur l'écran (E) et interdit la possibilité de réflexions multiples sur les deux miroirs :



1) S_1 et S_2 sont incohérentes. Qu'observe-t-on au voisinage du centre O de l'écran ?

2) Même question si les sources sont cohérentes.

3) Même question si S_2 est éteinte, (M_1) parfait et si on tient compte du coefficient de réflexion en énergie de (M_2) noté r .

Oral, Mines-Ponts, MP, 2000

Ex. 12 Fente source large et miroirs de Fresnel

La cohérence temporelle est admise dans cet exercice.

Une fente source S de largeur réglable, monochromatique de longueur d'onde λ , est placée parallèlement à l'arête commune Δ du dispositif des miroirs de Fresnel, d'angle α , à la distance $d = 50 \text{ cm}$ de cette arête. On place un écran (E) perpendiculaire à la direction moyenne des rayons lumineux qui interfèrent et à la distance $D = 2,5 \text{ m}$ de l'arête Δ . On mesure à l'aide d'un oculaire un interfrange i égal à $0,5 \text{ mm}$.

1) Quelle largeur maximale e_{\max} peut prendre la fente pour que la différence de marche en un point de l'écran varie au plus de $\frac{\lambda}{3}$ pour les rayons lumineux provenant des bords extrêmes de la fente ? Commenter.

2) On considère à présent une fente source S de largeur variable notée e . Cette fente est placée au foyer d'une lentille mince convergente (L) de distance focale $f = 50 \text{ cm}$. L'écran (E) est disposé comme dans la question précédente. On suppose que l'émission lumineuse est uniforme sur toute l'étendue de la fente source.

a) Exprimer l'intensité lumineuse $I(M)$ en tout point M de (E) . On fera apparaître dans cette expression l'interfrange i de la figure d'interférences. En déduire l'expression du degré de cohérence spatial γ de la fente source.

b) Proposer une condition quantitative portant sur l'épaisseur e de la fente afin que la visibilité des franges d'interférences sur (E) soit satisfaisante.

AN: $\lambda = 0,6 \mu\text{m}$ et $\alpha = 3 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$.

c) On impose une largeur $e = 0,1 \text{ mm}$ pour la fente source. Représenter l'allure de la variation de l'intensité lumineuse $I(M)$ en fonction de la position de M sur (E) .

d) Déterminer la largeur minimale de la fente pour laquelle on observe un brouillage des franges.

e) Que se passe-t-il si on augmente alors légèrement l'épaisseur ?

Indications

Ex. 4

Quelle est la nature des ondes qui interfèrent ?

Ex. 5

Commencer par exprimer la différence de marche en un point M de l'écran entre les ondes qui interfèrent passant soit par F_1 soit par F_2 , en étudiant séparément ce qui se passe avant et après le plan des fentes.

Ex. 8

Le sens de défilement des franges est déterminé en étudiant le déplacement de la frange centrale dans le plan de l'écran d'observation.

Ex. 9

1) Pour le calcul de la différence de marche, se reporter à l'exercice 6 du chapitre 2.

Ex. 10

3) Le choix du repère doit être guidé par la commodité du calcul du déphasage entre les ondes qui

interfèrent en un point M du champ d'interférences.

Ex. 11

1) Procéder par superposition en étudiant le phénomène d'interférences produit par chaque source S_1 et S_2 et ce en recherchant les sources secondaires associées.

2) Il y a cette fois quatre sources secondaires qui interfèrent entre elles.

Ex. 12

1) Raisonner sur l'écart entre les centres des figures d'interférences dues à chacun des bords de la fente source, écart qui ne doit pas dépasser ici $\frac{\lambda}{3}$.

2) a) Il faut décomposer la fente source en bande source de largeur ds comme cela a été vu en cours pour le dispositif de Young.

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1

1) Construisons géométriquement les images S_1 et S_2 de S en utilisant la propriété de symétrie du miroir plan:

L'angle au centre $\widehat{S_1OS_2}$ est égal à deux fois l'angle inscrit $\widehat{S_1SS_2}$ donc:

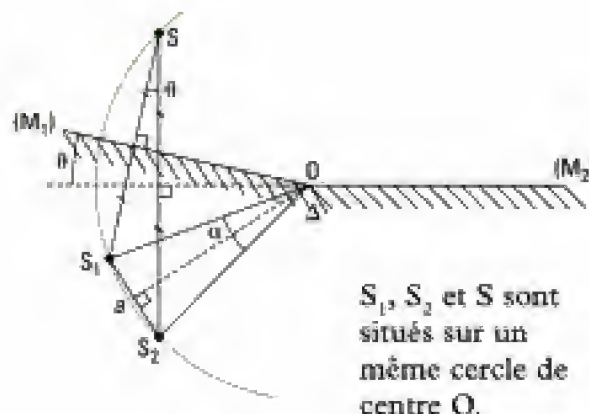
$$\alpha = 2\theta.$$

Dans le triangle isocèle S_1OS_2 , on a alors:

$$S_1S_2 = 2 \cdot R \cdot \tan \frac{\alpha}{2} = 2R \cdot \tan \theta$$

avec $\tan \theta \approx \theta$ (θ petit). Ainsi:

$$\boxed{S_1S_2 = 2R \cdot \theta.}$$



A.N.: $S_1S_2 = 2 \times 0,5 \left(\frac{2}{60} \times \frac{\pi}{180} \right) = 5,82 \cdot 10^{-4} \text{ m.}$

2) On constate que ce dispositif est formellement identique au dispositif des trous de Young dont on connaît l'expression de l'interfrange i . En adaptant les notations à ce problème, il vient:

$$i = \frac{\lambda(L + R \cos \theta)}{S_1S_2} = \boxed{\frac{\lambda(L + R)}{2R\theta}} \quad (\text{avec } \cos \theta = 1)$$

A.N.: $i = \frac{0,5 \cdot 10^{-6} \times (1 + 0,5)}{5,82 \cdot 10^{-4}} = 1,29 \text{ mm.}$

3) Si $R \rightarrow \infty$, on a $i \rightarrow \frac{\lambda}{2\theta}$: l'interfrange devient constant (il ne dépend plus de la position L de l'écran).

Exercice 2

1) Le point O étant choisi comme origine des phases, la phase Φ est définie selon:

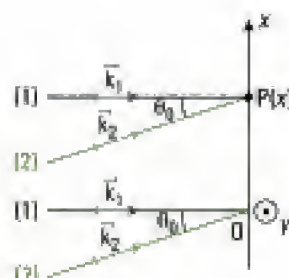
$$\Phi = \vec{k} \cdot \overrightarrow{OP}.$$

Soit pour l'onde 1, $\Phi_1 = \vec{k}_1 \cdot \overrightarrow{OP} = 0$ et pour l'onde 2,

$$\Phi_2 = \vec{k}_2 \cdot \overrightarrow{OP} = k_2 x \cdot \sin \theta_0 = \frac{2\pi}{\lambda} x \cdot \sin \theta_0.$$

On en déduit les expressions des amplitudes complexes associées aux deux ondes:

$$\underline{\psi}_1 = A_0 \cdot e^{-j\Phi_1} = \boxed{A_0} \quad \text{et} \quad \underline{\psi}_2 = A_0 \cdot e^{-j\Phi_2} = \boxed{A_0 \cdot e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} x \cdot \sin \theta_0}}.$$



2) • Répartition de l'éclairement dans le plan Oxy

Les deux ondes planes sont cohérentes et quasi parallèles, donc elles interfèrent. L'amplitude de l'onde résultante en P est donc:

$$\underline{\psi} = \underline{\psi}_1 + \underline{\psi}_2 = A_0 + A_0 \cdot e^{-j\Phi_2} = A_0 \cdot (1 + e^{-j\Phi_2}).$$

L'éclairement s'écrit donc :

$$\begin{aligned} I &= \underline{\psi} \cdot \underline{\psi}^* = A_0^2 (1 + e^{-j\phi_2}) \cdot (1 + e^{j\phi_2}) \\ &= A_0^2 (2 + 2 \cos \phi_2) \\ &= 2A_0^2 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} x \sin \theta_0 \right) \right]. \end{aligned}$$

En posant $I_0 = A_0^2$, il vient :

$$I(x) = 2I_0 \cdot \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} x \sin \theta_0 \right) \right].$$

• Géométrie des franges d'interférence

Dans le plan Oxy , l'intensité $I(x)$ est constante pour x constant. Les franges sont donc **rectilignes, parallèles à (Oy)** .

• Expression et calcul de l'interfrange i

$$\cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} x \sin \theta_0 \right) = \cos \left(2\pi \frac{x}{i} \right), \text{ soit : } \boxed{i = \frac{\lambda}{\sin \theta_0}}.$$

$$A.N. : i = \frac{632,8 \cdot 10^{-9}}{\sin 3^\circ} = 12,1 \text{ } \mu\text{m}.$$

 i est trop faible pour être observé à l'œil nu.

Exercice 3

$$1) (S_1M) = n \cdot S_1M = S_1M \quad (n = 1), \text{ avec } S_1M = \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2}$$

donc :

$$\boxed{(S_1M) = \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2}}.$$

2) Commençons par exprimer δ :

$$\delta = (S_1M) - (S_2M) = S_1M - S_2M, \text{ avec } S_2M = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2}.$$

Avec les approximations proposées, on a :

$$\begin{aligned} (S_1M) &= \left[\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= D \cdot \left[1 + \frac{(x + a/2)^2}{D^2} + \frac{y^2}{D^2} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= D + \frac{(x + a/2)^2}{2D} + \frac{y^2}{2D}. \end{aligned}$$

$$\text{De même : } (S_2M) = D + \frac{(x - a/2)^2}{2D} + \frac{y^2}{2D}.$$

$$\text{Donc : } \delta = \frac{(x + a/2)^2 - (x - a/2)^2}{2D} = \boxed{\frac{a \cdot x}{D}}.$$

3) L'intensité en tout point de l'écran s'écrit :

$$I = 2I_0 \cdot \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \frac{ax}{D} \right) \right].$$

Les lieux d'égale intensité correspondent donc au cas $x = \text{cte}$: les franges d'interférence sont donc **rectilignes et parallèles à (Oy)**.

4) L'intensité I peut aussi s'écrire sous la forme :

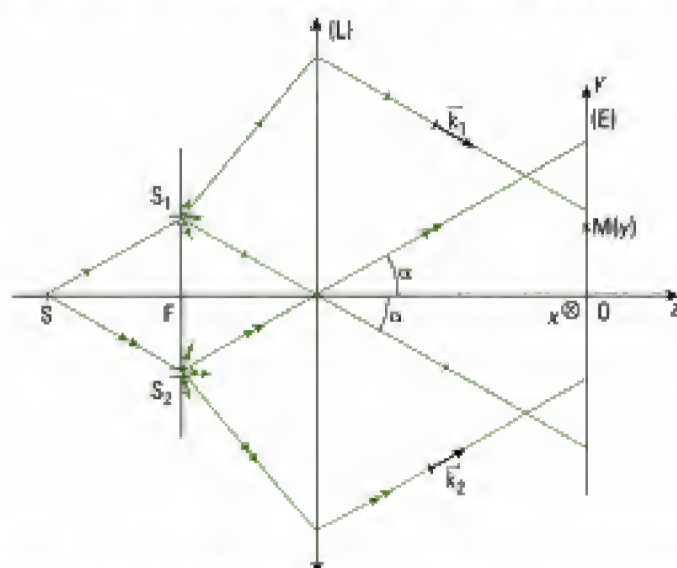
$$I = 2I_0 \left[1 + \cos \left(2\pi \frac{x}{i} \right) \right]; \text{ ainsi } I(x+i) = I(x).$$

Ici, $2\pi \cdot \frac{x}{i} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \frac{ax}{D}$ donc :

$$i = \frac{\lambda_0 \cdot D}{a}.$$

Exercice 4

1) Commençons par mettre en évidence le champ d'interférences par une construction géométrique. On constate que S_1 et S_2 sont situées dans le plan focal objet de (L) donc les rayons qui en émergent et émis depuis chaque fente forment deux faisceaux parallèles :



Les ondes émergentes de (L) sont donc planes et la différence de phase en un point $M(y)$ de l'écran s'écrit (cf. méthode n° 2) :

$$\Delta\varphi(M) = (\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{OM}$$

$$\text{avec } \vec{k}_2 \cdot \vec{OM} = k_2 \cdot y \cdot \sin \alpha = \frac{2\pi}{\lambda} y \cdot \sin \alpha; \vec{k}_1 \cdot \vec{OM} = - \frac{2\pi}{\lambda} y \cdot \sin \alpha.$$

$$\text{Donc : } \Delta\varphi(M) = \frac{4\pi}{\lambda} y \cdot \sin \alpha$$

$$\text{et ainsi : } I(M) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{4\pi}{\lambda} y \cdot \sin \alpha \right) \right].$$

Les franges d'interférences sur (E) sont donc rectilignes et parallèles à (Ox).

L'interfrange i comme il a été vu en cours est défini selon :

$$\Delta\varphi(M) = \frac{4\pi}{\lambda} y \cdot \sin \alpha = 2\pi \frac{y}{i}, \text{ ce qui équivaut à : } i = \frac{\lambda}{2 \cdot \sin \alpha}.$$

$$\text{A.N. : } \tan \alpha = \frac{S_1 S_2}{2f'} = \frac{0,6}{2 \times 25} = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ donc } \sin \alpha \approx 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ et } i = \frac{0,6 \cdot 10^{-6}}{2 \times 1,2 \cdot 10^{-2}} = 25 \mu\text{m}.$$

Commentaires :

- cet interfrange ne dépend pas de la position de (E);
- sa mesure nécessite un dispositif optique annexe comme un oculaire micrométrique par exemple.

Exercice 5

1) • Schéma du montage expérimental

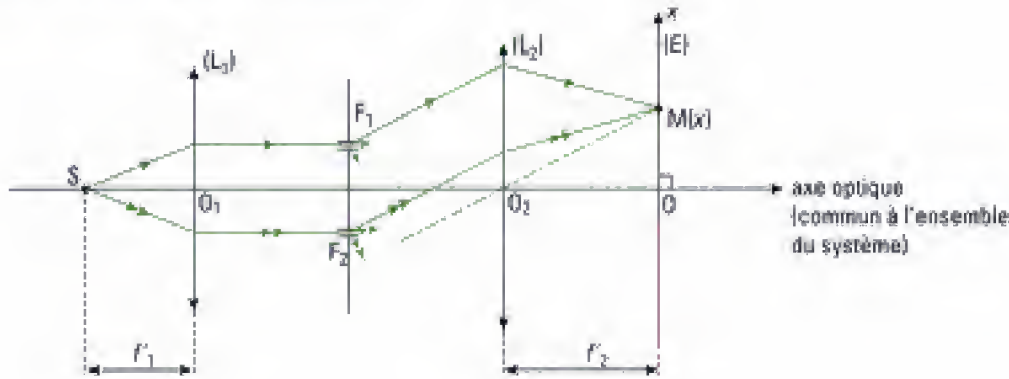


Figure 1

S: source lumineuse supposée ponctuelle (lampe + diaphragme) ou mieux une fente source qui permet d'améliorer la luminosité des points sources secondaires de F_1 et F_2 . S est supposée dans le plan médiateur de F_1F_2 .

(L_1) : lentille servant de collimateur, de distance focale f'_1 . Au voisinage de l'axe optique, les rayons sont parallèles et l'onde est localement plane. S étant située sur l'axe optique, (L_1) ne modifie pas l'égalité des chemins optiques (SF_1) et (SF_2) (revoir le théorème de Malus au chapitre 1).

F_1, F_2 : fentes de Young écartées de la distance a .

(L_2) : lentille de projection.

(E): écran d'observation de la figure d'interférences placé dans le plan focal image de (L_2) .

• Intérêt de (L_2)

Pour les fentes F_1 et F_2 suffisamment fines et avec $f'_2 \gg a$, (L_2) permet de concentrer la lumière au voisinage de l'axe optique, ce qui rend la figure d'interférences plus lumineuse. Elle permet également de superposer les deux taches de diffraction créées par chaque fente (en pratique, (L_2) est placée juste derrière le plan des fentes de Young).

2) En figure 2, schéma du montage expérimental lorsque la fente source est déplacée dans le plan vertical.

• Observations

On a toujours une différence de marche entre le chemin de F_1 à M et celui de F_2 à M:

$$\delta_1 = (F_2M) - (F_1M).$$

Ci-contre, on a représenté un plan d'onde (π) pour les deux rayons issus de F_1 et F_2 et diffractés dans la direction θ . D'après le théorème de Malus, les chemins (F_1M) et (HM) sont égaux. Ainsi, $\delta_1 = (F_2H) = F_2H = a \sin \theta$ (dans le triangle F_1F_2H et en prenant l'indice de l'air égal à 1)

avec $\sin \theta \approx \frac{x}{f'_2}$ (dans le triangle OO_2M)

donc:
$$\delta_1 = \frac{a \cdot x}{f'_2}.$$

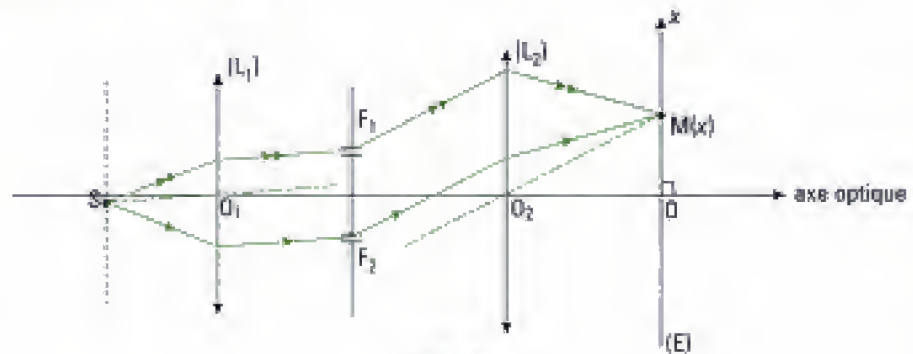
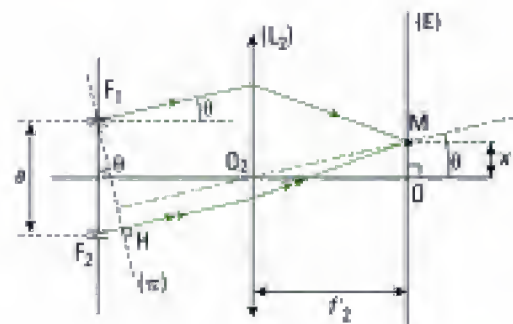


Figure 2





On a montré dans le cours que sans la présence de la lentille (L_1), cette différence de marche au même point M s'écrit :

$$\delta'_1 = \frac{ax}{D} \text{ où } D \text{ désigne la distance entre le plan des fentes et l'écran. On constate ainsi que les deux expressions}$$

donnant δ sont similaires : il suffit de remplacer D par f'_1 .

Reste maintenant à évaluer la différence de marche δ_2 entre la source primaire et les deux fentes. Le calcul est analogue à celui qui conduit à δ_1 grâce au principe de retour inverse de la lumière :

$$\delta_2 = (SF_2) - (SF_1) = \frac{ax_s}{f'_1}$$

en notant x_s l'abscisse de la source (nous avons choisi $x_s < 0$ en figure 2).

La différence de marche totale s'écrit donc :

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = a \cdot \left(\frac{x_s}{f'_1} + \frac{x}{f'_2} \right).$$

Remarque : il existe un déphasage supplémentaire égal à $\frac{\pi}{2}$ lors du passage de l'onde incidente au travers de F_1 et de F_2 . La différence de marche supplémentaire correspondante de $\frac{\lambda_0}{4}$ apparaissant dans les deux bras de l'interféromètre, elle disparaît dans le résultat final donnant δ .

L'ordre p correspond toujours à une différence de marche nulle. On a ainsi :

$$x = - \frac{f'_2}{f'_1} \cdot x_s > 0.$$

La frange centrale de la figure d'interférences initialement sur l'axe optique (question précédente) s'est déplacée vers le haut. De plus, l'interfrange i est toujours défini selon (cf. méthode n° 3, chapitre 2) :

$$i = \frac{\lambda_0}{d\delta/dx} = \frac{\lambda_0 \cdot f'_2}{a} \quad (\lambda_0 \text{ longueur d'onde dans le vide}).$$

On retrouve le même interfrange que dans le cas où la source S est sur l'axe optique du système.

Conclusion : le système de franges s'est traduit vers le haut de la quantité $-\frac{f'_2}{f'_1} \cdot x_s$, x_s désignant l'abscisse (algébrique) de la source.

Commentaire : en pratique, on ne cherche pas à décentrer la source. En revanche, un mauvais alignement est quasi inévitable. L'étude faite dans cet exercice permet de prendre en compte cette réalité expérimentale.

Exercices de niveau 2

Exercice 6

1) Il s'agit du dispositif des fentes de Young dont le calcul de l'interfrange a été fait en exercice 3 et qui s'écrit en prenant l'indice de l'air égal à 1 (ce qui ne sera pas le cas par la suite) :

$$i = \frac{\lambda_0 \cdot D}{a} \quad \text{A.N. : } i = \frac{0,5893 \cdot 10^{-6} \times 2}{2 \cdot 10^{-3}} = 0,59 \text{ mm.}$$

2) a) On modifie le chemin optique (S_1M) qui ici diminue puisque l'indice de réfraction de l'air est très légèrement supérieur à celui du vide. Or, dans le cas de la frange centrale, on a $\delta(M) = 0 = (S_2M) - (S_1M)$ à chaque instant, ce qui montre que dans le cas présent (S_2M) va également diminuer. **La frange centrale se décale donc vers le bas et il en est de même pour l'ensemble des franges d'interférences.**

b) • Calcul de l'indice de l'air n

On exprime la nouvelle différence de marche $\delta(M)$ au point M en fin d'expérience :

$$\delta = \frac{n \cdot a \cdot x}{D} + (n - 1) \cdot \ell \text{ car } (S_1M) \text{ a varié de } (1 - n) \cdot \ell.$$

En raisonnant ici au centre de l'écran, on a $x = 0$:

$$\delta(0) = (n - 1) \cdot \ell.$$

Or, avant de faire le vide dans T, la différence de marche est nulle au centre de l'écran. La variation de $\delta(0)$ au cours de cette expérience s'écrit donc :

$$\Delta\delta(0) = (n - 1) \cdot \ell - 0 = (n - 1) \cdot \ell, \text{ avec } \Delta\delta(0) = \lambda_0 \cdot \Delta p(0)$$

et donc :

$$n = 1 + \frac{\lambda_0 \cdot \Delta p(0)}{\ell}$$

A.N. : $n = 1,000293$ (0,03 % d'écart à la valeur usuelle de 1).

• Calcul du nouvel interfrange

Avec $\delta = \frac{a \cdot n \cdot x}{D} + (n - 1) \cdot \ell$, il vient (cf. méthode n° 3, chapitre 2) :

$$i = \frac{\lambda_0}{d\delta/dx} = \frac{\lambda_0 \cdot D}{a \cdot n} \quad \text{A.N. : } i = 0,59 \text{ mm.}$$

Exercice 7

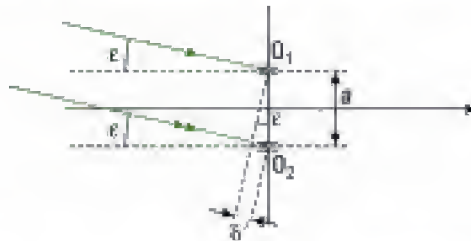
1) Il s'agit du dispositif des fentes de Young. La différence de marche entre les rayons issus de S_1 est due au dispositif. Avec la lentille de projection (L), on a :

$$\delta = \frac{a \cdot y}{f'_1} \quad (\text{voir exercice 5}),$$

et

$$I_{S_1}(M) = 2I_0 \cdot \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \delta\right) \right]$$

Pour l'étoile S_2 , les rayons diffractés par O_1 et O_2 présentent une différence de marche supplémentaire δ' due à l'inclinaison ε de S_2 par rapport à l'axe optique du montage :



$$\delta' = a \cdot \sin \varepsilon \approx a \cdot \varepsilon$$

à l'ordre 1 car ε est petit

Les deux étoiles étant par hypothèse identiques et très proches, l'intensité lumineuse émise par S_2 est identique à celle de S_1 , donc :

$$I_{S_2}(M) = 2I_0 \cdot \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta + \frac{2\pi}{\lambda} \delta'\right) \right].$$

L'intensité lumineuse totale $I(y) = I_{S_1}(M) + I_{S_2}(M)$ car S_1 et S_2 sont distinctes donc incohérentes :

$$\begin{aligned} I(y) &= 2I_0 \left[2 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta + \frac{2\pi}{\lambda} \delta'\right) \right] \\ &= 2I_0 \times 2 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda} + \frac{\pi\delta'}{\lambda}\right) \cos\left(\frac{\pi\delta'}{\lambda}\right) \right]. \end{aligned}$$

En posant $K = 4 I_0$, il vient alors :

$$I(y) = K \cdot \left[1 + \cos\left(\frac{\pi\delta'}{\lambda}\right) \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda} + \frac{\pi\delta'}{\lambda}\right) \right].$$

2) En pratique, les deux étoiles étant proches, on a $\varepsilon \ll \frac{y}{f'_1}$ ce qui équivaut à $\delta' \ll \delta$. Ainsi le terme $\cos\left(\frac{\pi\delta'}{\lambda}\right)$ varie beaucoup plus lentement que le terme $\cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda} + \frac{\pi\delta'}{\lambda}\right)$. On peut donc raisonner sur quelques périodes de ce terme et ainsi supposer $\cos\left(\frac{\pi\delta'}{\lambda}\right)$ constant. Il vient :

$$I_{\max} \approx K \cdot \left[1 + \left| \cos\left(\frac{\pi\delta'}{\lambda}\right) \right| \right] \quad \left(\cos\left(\frac{\pi\delta'}{\lambda}\right) \text{ peut a priori prendre des valeurs négatives} \right)$$

$$I_{\min} \approx K \cdot \left[1 - \left| \cos\left(\frac{\pi\delta'}{\lambda}\right) \right| \right] \Rightarrow \boxed{V = \left| \cos\left(\frac{\pi\delta'}{\lambda}\right) \right|}$$

3) • Sur quel paramètre agir pour obtenir $V = 0$?

$$V = \left| \cos\left(\frac{\pi\delta'}{\lambda}\right) \right| = \left| \cos\left(\frac{\pi a \varepsilon}{\lambda}\right) \right|$$

Le seul paramètre qui permet d'annuler $V(\delta')$ est l'écartement a des fentes.

• Qu'observe-t-on lorsque $V = 0$?

Il n'y a **plus d'interférences** et l'éclairement de (E) est uniforme car $I(y) = K \cdot [1 + 0] = K$.

• Peut-on séparer les systèmes doubles ξ Hercule et 85 Pégase ?

V est une fonction de ε mais il faut en outre respecter la condition $a \leq D$ pour que la mesure soit possible.

$$V = 0 \text{ si } \frac{\pi a \varepsilon}{\lambda} = (2k + 1) \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{N} \text{ avec donc } \frac{\lambda(2k + 1)\pi}{2\pi \cdot \varepsilon} \leq D \Leftrightarrow \varepsilon \geq (2k + 1) \frac{\lambda}{2D}$$

La première annulation de $V(\delta')$ est celle qui correspond à l'angle minimal résolu par l'interféromètre, soit ici :

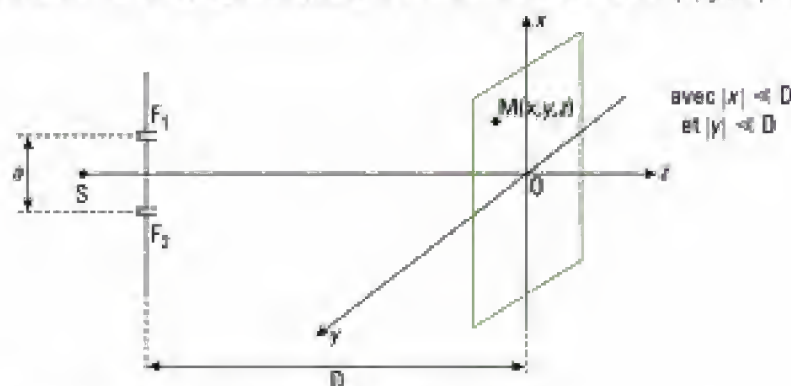
$$\varepsilon_{\min} = \frac{\lambda}{2D} = \frac{550 \cdot 10^{-9}}{2 \times 60 \cdot 10^{-3}} = 4,5 \cdot 10^{-6} \text{ rad} = 2,6 \cdot 10^{-4}^\circ = 0,92''$$

Conclusion : cette lunette peut séparer le système double d'Hercule mais pas celui de Pégase.

Exercice 8

1) • Détermination de δ

Nous effectuons le calcul de δ en introduisant les trois coordonnées (x, y, z) de M :



$$\delta = (F_2M) - (F_1M) \text{ or dans l'air : } (F_2M) = F_2M; (F_1M) = F_1M$$

$$\text{Or : } F_2M = \left[\left(x + \frac{a}{2} \right)^2 + D^2 + y^2 \right]^{\frac{1}{2}} = D \cdot \left[1 + \frac{y^2 + \left(x + \frac{a}{2} \right)^2}{D^2} \right]^{\frac{1}{2}} = D \cdot \left[1 + \frac{y^2 + \left(x + \frac{a}{2} \right)^2}{2D^2} \right]$$

à l'ordre 2 en $\frac{a}{D}$, $\frac{x}{D}$ et $\frac{y}{D}$.

De même : $F_1M = \left[\left(x - \frac{a}{2} \right)^2 + D^2 + y^2 \right]^{\frac{1}{2}} = D \cdot \left[1 + \frac{y^2 + \left(x - \frac{a}{2} \right)^2}{2D^2} \right]$.

Donc : $\delta = F_2M - F_1M = \frac{1}{2D} \left[\left(x + \frac{a}{2} \right)^2 - \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 \right] = \boxed{\frac{a \cdot x}{D}}$.

• Détermination de l'interfrange

On introduit l'ordre d'interférence $p = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{a \cdot x}{D \cdot \lambda_0}$; sachant que l'interfrange i représente la variation Δx correspondant à $\Delta p = 1$, on a :

$$\boxed{i = \frac{\lambda_0 \cdot D}{a}} \quad \text{où } \lambda_0 \text{ désigne la longueur d'onde dans le vide.}$$

• Détermination de l'éclairement de l'écran

$$\boxed{I(M) = 2I_0 \cdot \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \frac{ax}{D} \right) \right]}.$$

2) • Sens de défilement des franges ?

Le chemin optique (F_2M) a augmenté de la quantité :

$$n \cdot e - e = (n - 1) \cdot e.$$

⚠ Ne pas oublier de retrancher la différence de marche qu'aurait introduit l'air remplacé par la lame, c'est-à-dire une lame d'air d'épaisseur e .

Ceci montre que la frange centrale, qui correspond à une différence de marche nulle entre les rayons issus de F_1 et F_2 , doit être telle que (F_1M) soit plus grand. **La frange centrale s'est donc déplacée vers le bas** ($x < 0$).

• Calcul de e pour un défilement des franges de 3 cm

On pose $x_0 = -3$ cm en continuant à raisonner sur la frange centrale.

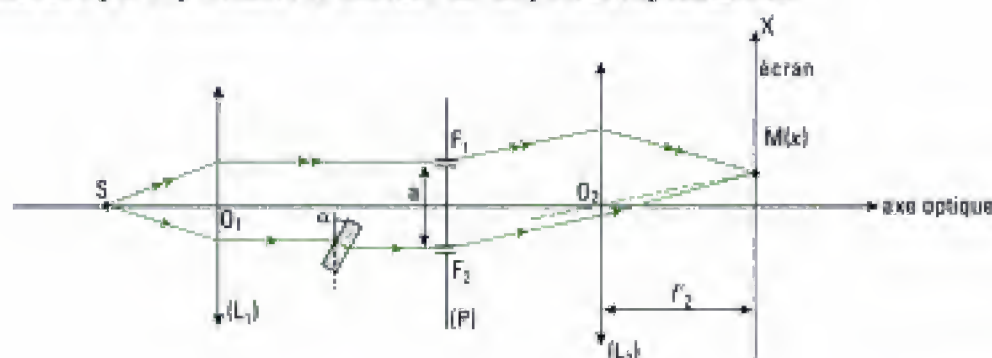
$$\delta = 0 = \frac{a \cdot x_0}{D} + (n - 1)e \quad \text{d'où} \quad \boxed{e = - \frac{a \cdot x_0}{(n - 1) \cdot D}} \quad \text{A.N. : } e = 100 \mu\text{m}.$$

Commentaire

Cette expérience s'avère délicate en pratique puisque le déplacement des franges est brutal et le repérage de la frange centrale est impossible en lumière monochromatique. Elle peut être repérée au préalable en lumière blanche, mais son observation après mise en place de la lame n'est pas toujours possible si le verre est dispersif (voir l'exercice 7 du chapitre 4).

Exercice 9

1) On commence par représenter le schéma du dispositif expérimental :



On introduit f'_2 la distance focale de la lentille (L_2).

Pour donner l'expression de l'éclairement en un point M d'abscisse x sur l'écran, il faut commencer par calculer la différence de marche $\delta(M)$. Avec :

- δ_1 : différence de marche introduite avant le plan (P) des fentes. Cette différence est seulement due à la présence de la lame de verre (théorème de Malus) ;
- δ_2 : différence de marche introduite entre (P) et l'écran.

Nous avons déjà déterminé δ_1 dans l'exercice 6 du chapitre 2. Nous renvoyons le lecteur à cet exercice

qui a montré que :
$$\delta_1 = e \cdot \left[n - 1 + \frac{\alpha^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right] \text{ à l'ordre 2 en } \alpha.$$

De même, nous avons déterminé δ_2 à l'exercice 5 de ce chapitre : $\delta_2 = \frac{a \cdot x}{f'_2}.$

Donc :
$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = e(n-1) \cdot \left(1 + \frac{\alpha^2}{2n} \right) + \frac{a \cdot x}{f'_2}.$$

On en déduit l'expression de l'éclairement au point M :

$$I(M) = 2I_0 \cdot \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \delta \right) \right].$$

$$I(M) = 2I_0 \cdot \left[1 + \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda_0} \left[e \cdot (n-1) \cdot \left(1 + \frac{\alpha^2}{2n} \right) + \frac{a \cdot x}{f'_2} \right] \right] \right].$$

2) Commençons par évaluer la variation $\Delta\delta$ de la différence de marche consécutive à l'inclinaison de la lame de verre d'un angle α sur la verticale. Initialement, la lame étant verticale, elle donne lieu à une différence de marche $(n-1) \cdot e$. Ainsi, la variation s'écrit :

$$\Delta\delta = \left[(n-1) \cdot e \cdot \left(1 + \frac{\alpha^2}{2n} \right) + \frac{a \cdot x}{f'_2} \right] - \left[(n-1) \cdot e + \frac{a \cdot x}{f'_2} \right]$$

et donc :
$$\Delta\delta = (n-1) \cdot e \cdot \frac{\alpha^2}{2n}.$$

La variation correspondante de l'ordre d'interférence p est donc :

$$\Delta p = \frac{\Delta\delta}{\lambda_0} = \frac{\alpha^2 \cdot (n-1)}{2n \cdot \lambda_0} \cdot e.$$

Or :
$$\Delta p \approx \frac{1}{10} = \Delta p_{\min}$$

soit :

$$\alpha \approx \sqrt{\frac{2n \cdot \lambda_0 \cdot \Delta p_{\min}}{(n-1) \cdot e}}.$$

A.N. : on reprend les valeurs de l'exercice précédent ce qui conduit à :

$$\alpha \approx \sqrt{\frac{2 \times 1,4 \times 589 \cdot 10^{-9} \times 0,1}{0,4 \times 14 \cdot 10^{-5}}} = 5,43 \cdot 10^{-2} \text{ rad, soit : } \alpha_{\min} = 3,1^\circ.$$

Exercice 10

1) La source ponctuelle S placée au foyer de (L) fournit un faisceau de lumière parallèle. L'onde incidente sur l'interféromètre est donc plane et il en est de même pour les ondes réfléchies par (M_1) et (M_2) : **les ondes qui interfèrent sont planes.**

2) Pour répondre, il faut mettre en évidence le champ d'interférences (cf. méthode n° 1 du chapitre 2). En notant i l'angle d'inclinaison du faisceau parallèle sur (M_1), on obtient la figure 1.

Les interférences s'observent donc dans un volume d'espace dont nous avons représenté la trace dans le plan de figure : **les interférences sont donc non localisées.**

donc: $\vec{k}_2 - \vec{k}_1 = \frac{4\pi}{\lambda} \cdot \sin \alpha \cdot \vec{e}_y$ avec $\vec{OM} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y$.

Il vient: $\Delta\varphi(\mathbf{M}) = \frac{4\pi}{\lambda} \cdot \sin \alpha \cdot \vec{e}_y \cdot (x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y) = \boxed{\frac{4\pi}{\lambda} \cdot y \cdot \sin \alpha}$

4) a) L'intensité lumineuse se déduit des questions précédentes sachant que les deux ondes qui interfèrent ont ici même intensité I_0 (miroirs identiques):

$$I(\mathbf{M}) = 2I_0 \cdot [1 + \cos(\Delta\varphi(\mathbf{M}))], \text{ soit: } \boxed{I(\mathbf{M}) = 2I_0 \cdot \left[1 + \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda} \cdot y \cdot \sin \alpha\right)\right]}.$$

b) Les surfaces d'égale intensité sont telles que:

$$\Delta\varphi(\mathbf{M}) = \text{cte}, \text{ soit ici: } \frac{4\pi}{\lambda} \cdot y \cdot \sin \alpha = \text{cte} \text{ équivaut à } y = \text{cte}.$$

Ce sont donc des **plans orthogonaux à la direction (OY)**.

5) On peut exprimer l'interfrange i en remarquant que $I(y + i) = I(y)$. Ainsi:

$$\frac{4\pi}{\lambda} \cdot i \cdot \sin \alpha = 2\pi, \text{ donc: } i = \boxed{\frac{\lambda}{2 \cdot \sin \alpha}}.$$

Exercices de niveau 3

Exercice 11

1) S_1 et S_2 sont incohérentes.

• Analyse qualitative préalable

La source primaire S_1 fait apparaître à travers le dispositif deux sources secondaires notées S_{1a} et S_{1b} (voir figure 1 ci-dessous). Ces deux sources secondaires cohérentes vont interférer. De même S_2 fait apparaître les sources secondaires S_{2a} et S_{2b} cohérentes qui interfèrent entre elles.

Les sources secondaires issues de S_1 ne peuvent interférer avec celles issues de S_2 car elles ne sont pas cohérentes entre elles. L'intensité résultante en un point M de l'écran est donc la somme de l'intensité $I_1(\mathbf{M})$ produite par (S_{1a} et S_{1b}) et de l'intensité $I_2(\mathbf{M})$ produite par (S_{2a} et S_{2b}).

• Observation au voisinage du centre O de l'écran

Commençons par rechercher les sources secondaires S_{1a} et S_{1b} . S_{1a} est symétrique de S_1 par rapport à (M_1) et S_{1b} est symétrique de S_1 par rapport à (M_2) :

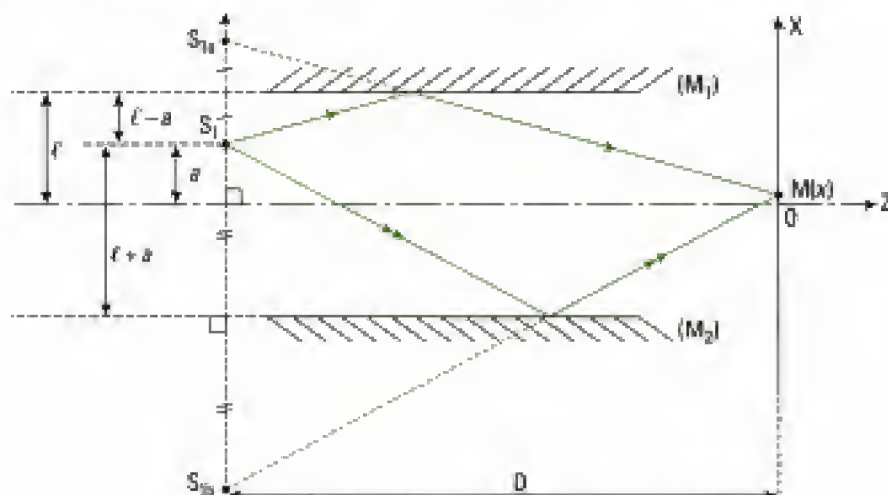


Figure 1 (le cache a été omis pour une meilleure lisibilité)

L'intensité lumineuse due à l'interférence des sources S_{1a} et S_{1b} s'écrit :

$$I_1(x) = 2I_0 \cdot \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \delta_1(M) \right) \right]$$

où δ_1 représente la différence de marche dont l'expression a été établie dans l'exercice 3 de ce chapitre. Ici δ_1 s'exprime selon :

$$\delta_1(M) = \frac{S_{1a}S_{1b} \cdot x_M}{D} \quad (1)$$

avec : $S_{1a}S_{1b} = S_{1a}S_1 + S_1S_{1b}$; or S_{1a} étant symétrique de S_1 par rapport à (M_1) , la distance $S_{1a}S_1$ est égale à $2(\ell - a)$. De même, la distance S_1S_{1b} est égale à $2(\ell + a)$. Donc :

$$S_{1a}S_{1b} = 2(\ell - a + \ell + a) = 4\ell.$$

x_M est l'abscisse du point M qui est comptée par rapport à la médiatrice du segment $[S_{1a}S_{1b}]$: x_M n'est donc pas égale à x . Pour déterminer la relation liant x_M à x , on cherche la position du milieu J du segment $[S_{1a}S_{1b}]$:

$$S_{1a}J = 2\ell \text{ avec : } x(S_{1a}) = a + 2(\ell - a) = 2\ell - a$$

donc :

$$x(J) = x(S_{1a}) - \frac{S_{1a}S_{1b}}{2} = -a.$$

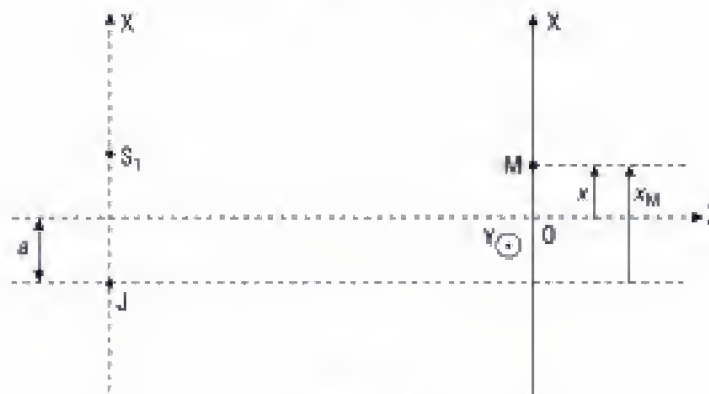


Figure 2

Ainsi $x_M = x + a$.

L'expression (1) se réécrit donc selon :

$$\delta_1(M) = \frac{4\ell \cdot (x + a)}{D}$$

d'où :

$$I_1(x) = 2I_0 \cdot \left[1 + \cos \left[\frac{8\pi\ell}{\lambda D} \cdot (x + a) \right] \right].$$

Pour déterminer $I_2(x)$, il suffit de remarquer que la position de S_2 est symétrique de celle de S_1 par rapport à l'axe optique. On a donc ici :

$$x_M = x - a$$

et

$$I_2(x) = 2I_0 \cdot \left[1 + \cos \left[\frac{8\pi\ell}{\lambda D} \cdot (x - a) \right] \right].$$

Ainsi, il vient :

$$I(x) = I_1(x) + I_2(x) = 2I_0 \cdot \left[2 + \cos \left[\frac{8\pi\ell \cdot (x + a)}{\lambda D} \right] + \cos \left[\frac{8\pi\ell \cdot (x - a)}{\lambda D} \right] \right]$$

$$I(x) = 4I_0 \cdot \left[1 + \cos \left(\frac{8\pi\ell x}{\lambda D} \right) \cdot \cos \left[\frac{8\pi\ell a}{\lambda D} \right] \right].$$

Le terme $\cos \left(\frac{8\pi\ell x}{\lambda D} \right)$ montre que l'intensité lumineuse est constante lorsque x est fixé ;

$\frac{8\pi\ell x}{\lambda D} = 2\pi \cdot \frac{x}{i}$ avec $i = \frac{\lambda D}{4\ell}$ qui représente l'interfrange.

Conclusion : on observe un système de franges rectilignes (au voisinage du centre O) parallèle entre elles et à (OY). L'interfrange est constant, les franges sont donc équidistantes.

Le terme de contraste $\mathcal{C} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \left| \cos\left(\frac{8\pi \ell a}{\lambda D}\right) \right|$ montre que le système de franges peut être brouillé si :

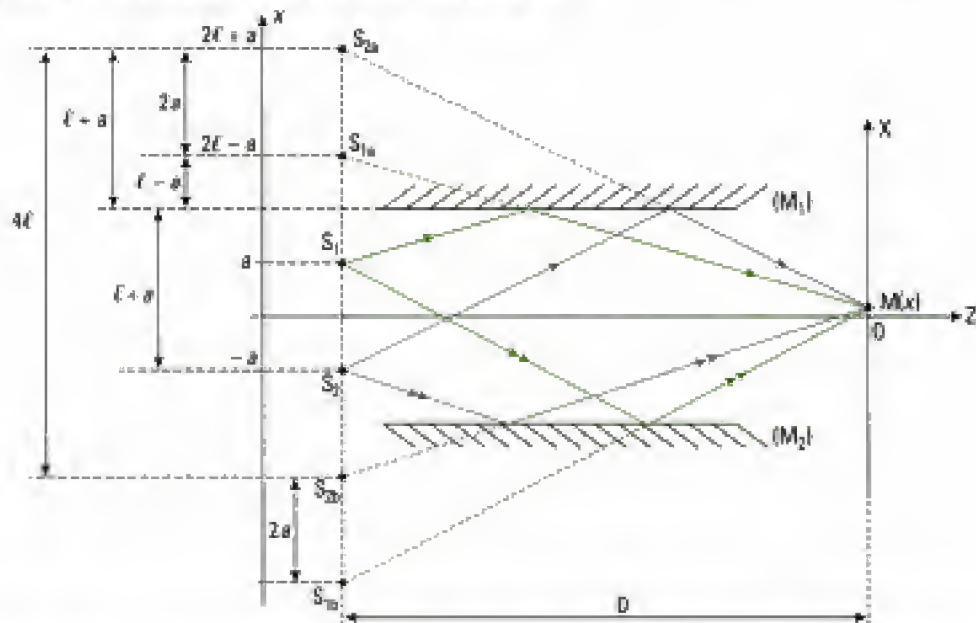
$$\frac{8\pi \ell a}{\lambda D} = (2m+1) \cdot \frac{\pi}{2} \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

2) • Analyse qualitative préalable

Ici les deux sources primaires étant cohérentes, les quatre sources secondaires S_{1a} , S_{1b} , S_{2a} et S_{2b} sont toutes cohérentes entre elles. Il s'agit donc d'étudier la figure d'interférences due à quatre sources ponctuelles cohérentes disposées le long d'une droite.

• Observation au voisinage du centre O de l'écran

Commençons par représenter la position des sources :



L'amplitude complexe de la vibration résultante au point M s'écrit alors, en adoptant le modèle scalaire de la lumière :

$$\underline{\varepsilon}_M = \underline{\varepsilon}_{1a} + \underline{\varepsilon}_{1b} + \underline{\varepsilon}_{2a} + \underline{\varepsilon}_{2b}.$$

Il faut par ailleurs convenir d'une origine des phases (arbitraire quoiqu'il arrive) ; prenons par exemple la vibration émise par la source secondaire S_{2a} comme origine des phases et notons s_0 son amplitude. La différence de marche $\delta(M)$ au point M d'abscisse x entre les vibrations issues de S_{1a} et S_{2a} s'écrit :

$$\delta(M) = \frac{2ax}{D} \quad \text{avec } \underline{\varepsilon}_{2a} = s_0$$

donc :

$$\underline{\varepsilon}_{1a} = s_0 \cdot e^{j\varphi} \quad \text{où } \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \delta = \frac{4\pi ax}{\lambda D}.$$

Les sources secondaires S_{2b} et S_{2a} étant espacées de $2(\ell + a) + 2(\ell - a) = 4\ell$, la différence de marche entre les vibrations issues de S_{2b} et S_{2a} s'écrit :

$$\delta(M) = \frac{4\ell \cdot x}{D}$$

donc :

$$\underline{\varepsilon}_{2b} = s_0 \cdot e^{j\varphi_1} \quad \text{où } \varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{4\ell x}{D} = \frac{8\pi \ell x}{\lambda D}.$$

Enfin, de même on a :

$$\underline{\varepsilon}_{1b} = \underline{\varepsilon}_{2b} \cdot e^{j\varphi} = s_0 \cdot e^{j\varphi_1} \cdot e^{j\varphi}$$

d'où:

$$\begin{aligned} \varepsilon_M &= \varepsilon_0 \cdot [1 + e^{i\varphi} + e^{i\varphi_r} + e^{i\varphi_r} \cdot e^{i\varphi}] \\ &= \varepsilon_0 \cdot [1 + e^{i\varphi} + e^{i\varphi_r}(1 + e^{i\varphi})] \\ &= \varepsilon_0 \cdot (1 + e^{i\varphi}) \cdot (1 + e^{i\varphi_r}) \end{aligned}$$

avec:

$$\begin{aligned} (1 + e^{i\varphi}) \cdot (1 + e^{i\varphi_r}) &= e^{j\frac{\varphi}{2}} \cdot \left(e^{j\frac{\varphi}{2}} + e^{-j\frac{\varphi}{2}} \right) \times e^{j\frac{\varphi_r}{2}} \cdot \left(e^{j\frac{\varphi_r}{2}} + e^{-j\frac{\varphi_r}{2}} \right) \\ &= e^{j\left(\frac{\varphi + \varphi_r}{2}\right)} \times 4 \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi_r}{2} \end{aligned}$$

ainsi:

$$I(M) = \varepsilon_M \cdot \varepsilon_M^* = 4 \cdot \varepsilon_0^2 \cdot \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\varphi_r}{2}\right).$$

Posons $I_0 = 4 \varepsilon_0^2$:

$$I(M) = I_0 \cdot \cos^2\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{4\pi \ell x}{\lambda D}\right).$$

Commentaire: cette expression contient un terme interférentiel dépendant de x qui s'écrit :

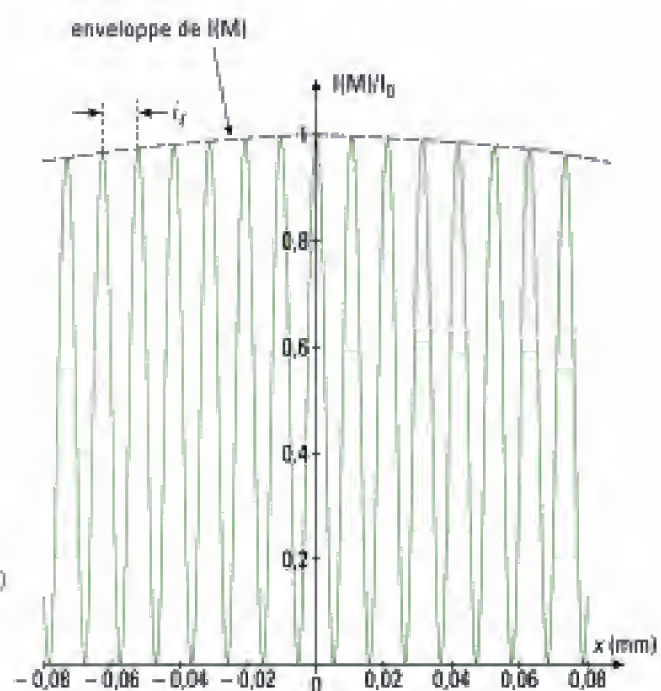
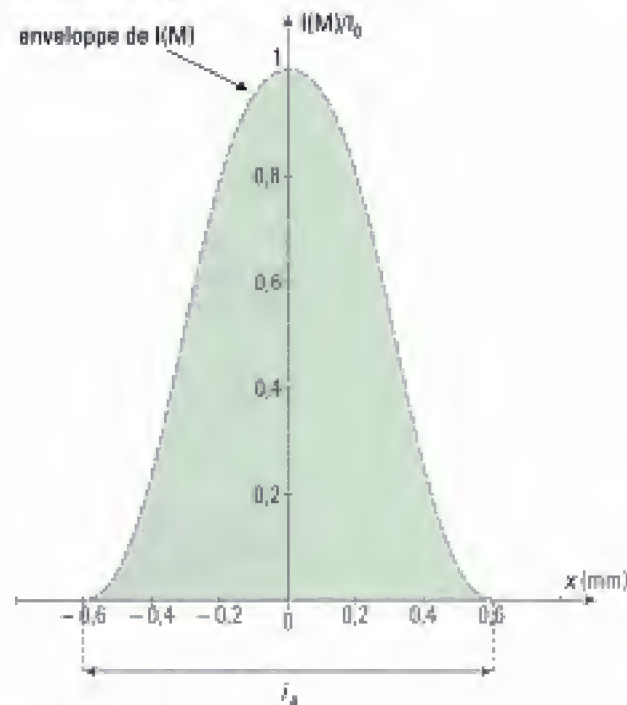
$$\cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D}\right) \cdot \cos\left(\frac{4\pi \ell x}{\lambda D}\right) = \cos\left(2\pi \frac{x}{i_a}\right) \cdot \cos\left(2\pi \frac{x}{i_r}\right)$$

où $i_a = \frac{\lambda D}{a}$, $i_r = \frac{\lambda D}{2\ell}$ et $\frac{i_a}{i_r} = \frac{2\ell}{a}$.

Précisons l'allure de la figure d'interférence $I(x)$ en prenant les valeurs numériques suivantes :

$$a = 0,5 \text{ mm}; \quad \lambda = 0,63 \text{ } \mu\text{m}; \quad D = 2 \text{ m}; \quad \ell = 30 \text{ mm}.$$

On obtient ainsi:



avec ici: $\frac{i_a}{i_r} = 120$.

La figure d'interférences d'interfrange i_r est donc « modulée » en amplitude par un terme basse fréquence spatiale de période i_a .

Cette figure est différente de celle présentée dans le cours car il ne s'agit pas ici d'interférences de deux mais de quatre ondes issues des sources secondaires.

3) • Analyse qualitative préalable

Il s'agit à présent d'étudier les interférences ayant lieu entre deux sources ponctuelles, cohérentes, virtuelles mais dont les amplitudes (dans le champ d'interférences) sont ici différentes car le miroir (M_2) n'est plus considéré comme parfait.

• Observation au voisinage du centre O

La figure qui représente ce nouveau cas est celle donnée en figure 1.

Hypothèse : nous supposons, pour simplifier les calculs, que r est un coefficient de réflexion en énergie (en pratique c'est effectivement cette donnée qui est connue lorsque le métal du miroir est choisi).

En notant s_0 l'amplitude des vibrations émises par S_1 :

– après réflexion sur (M_1) : $I_1 = s_1^2 = s_0^2$ (car (M_1) est parfait)

– après réflexion sur (M_2) : $I_2 = s_2^2 = r \cdot s_0^2$

avec en outre :
$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2\sqrt{I_1(M) \cdot I_2(M)} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \delta\right)$$

où
$$\delta = \frac{4\ell \cdot (x + a)}{D} \quad (\text{revoir la question 1})$$

et donc
$$I = s_0^2 + r \cdot s_0^2 + 2 s_0^2 \cdot \sqrt{r} \cdot \cos\left[\frac{8\pi\ell \cdot (x + a)}{\lambda D}\right]$$

soit, en posant ici $I_0 = s_0^2$:

$$I = I_0 \cdot \left[1 + r + 2\sqrt{r} \cdot \cos\left[\frac{8\pi\ell \cdot (x + a)}{\lambda D}\right] \right]$$

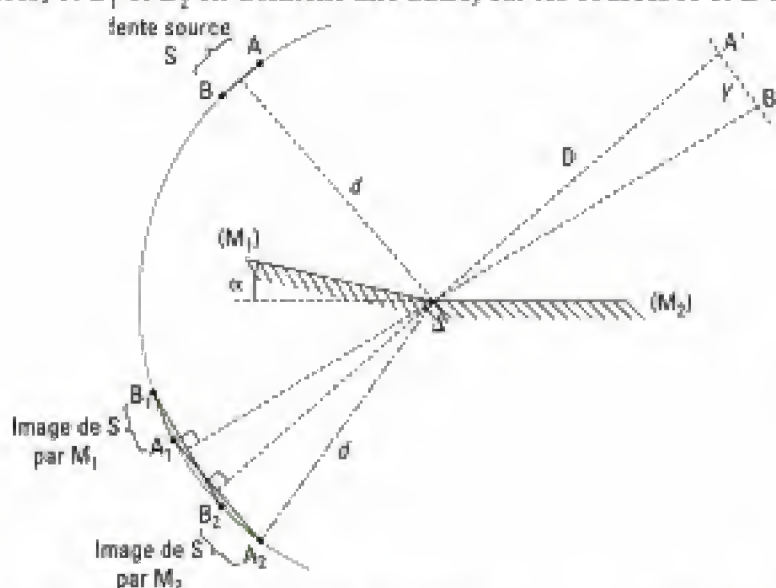
Commentaire : avec $r = 87\%$ pour $\lambda = 0,63 \mu\text{m}$ (miroir réalisé avec de l'aluminium), on obtient $I_{\min} = 4,5 \cdot 10^{-3} \cdot I_0$ et $I_{\max} = 3,73 I_0$. La figure d'interférences reste très bien contrastée et les franges brillantes sont d'intensité légèrement inférieure à la valeur maximale $4I_0$ obtenue lorsque $r = 1$.

Exercice 12

1) • Analyse qualitative préalable

L'énoncé ne précise rien sur le point à considérer sur l'écran (E) dont on ne connaît pas non plus la dimension transversale. Il faut donc choisir astucieusement le point de l'écran et, pour faciliter le calcul, le plus simple est de raisonner au centre de la figure d'interférences.

On effectue alors une construction géométrique en cherchant les images secondaires des bords A et B de la fente source notées respectivement A_1, A_2 , et B_1, B_2 . Ainsi A_1 et A_2 donnent une figure d'interférences, et B_1 et B_2 en donnent une autre, car les sources A et B sont incohérentes entre elles :



$$\text{avec } e = AB = A_1B_1 = A_2B_2$$

A' est au centre de la figure d'interférences dues au point source A s'il agissait seul. B' est au centre de la figure d'interférences dues au point source B s'il agissait seul.

En pratique, on sait que l'angle α est petit. Ainsi, en première approximation on peut écrire :

$$\frac{y}{D} = \frac{e}{d} \quad (1)$$

où $y = A'B'$ désigne le décalage des centres des figures d'interférences dues aux deux bords extrêmes A et B de la fente source S.

Or la différence de marche $\delta(M')$ en un point M' de l'écran repéré par sa position x s'écrit :

$$\delta(M') = \frac{M_1 M_2 \cdot x}{D + d}$$

où M_1 et M_2 sont les images secondaires d'un point source M de S.

Si on prend le point B' comme référence des positions, la différence de marche est nulle au point

B' pour les rayons issus de B_1 et B_2 et elle s'écrit $\frac{A_1 A_2 \cdot y}{D + d}$ pour ceux issus de A_1 et A_2 .

On en déduit que la variation de différence de marche pour un point de l'écran éclairé par la source AB lorsque l'on passe d'un bord de la fente à l'autre est telle que :

$$\frac{A_1 A_2 \cdot y}{D + d} - 0 = \frac{A_1 A_2 \cdot y}{D + d} \approx \frac{\lambda}{3} \quad (2)$$

Or l'interfrange i s'écrit classiquement : $i = \frac{\lambda(D + d)}{A_1 A_2}$ (3) dont la valeur est ici connue.

L'équation (1) entraîne $y = \frac{De}{d}$ et l'équation (3) donne : $\frac{A_1 A_2}{D + d} = \frac{\lambda}{i}$.

Ainsi : $\frac{A_1 A_2 \cdot y}{D + d} = \frac{\lambda}{i} \cdot \frac{D}{d} \cdot e$ et l'équation (2) implique : $\lambda \frac{D}{d \cdot i} \cdot e \approx \frac{\lambda}{3}$.

On obtient finalement la condition :

$$e \approx \frac{d \cdot i}{3D} \quad A.N. : e \approx e_{\max} = 0,033 \text{ mm.}$$

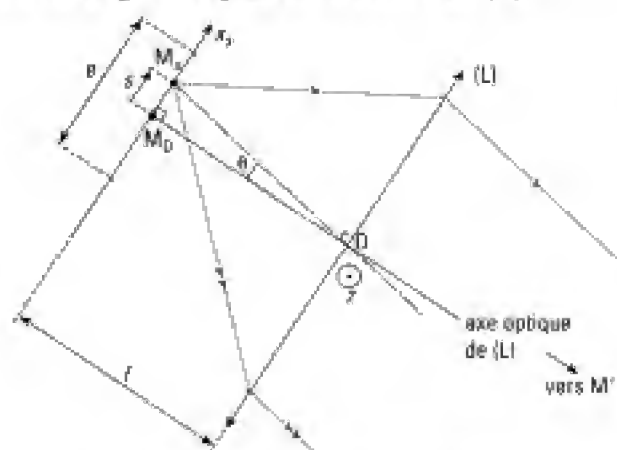
Commentaire : cette valeur est très faible et la source éclaire peu. Le phénomène d'interférences est en ce cas peu lumineux.

Le critère $\frac{\lambda}{3}$ permet d'obtenir des interférences avec une fente d'épaisseur $e \approx e_{\max}$. Celles-ci disparaissent dès que la variation de δ atteint la valeur de $\frac{\lambda}{2}$ (voir le cours).

2) a) • Expression de l'intensité lumineuse

Dans cette deuxième question, les miroirs de Fresnel sont éclairés en lumière parallèle. On retrouve le même montage optique que celui étudié en exercice 10.

Nous avons représenté ci-dessous la fente source S de largeur e et un point M_s de la fente, vu sous un angle θ depuis le centre O de (L) :



On repère la position du point M par l'abscisse notée s sur l'axe X_s avec ici :

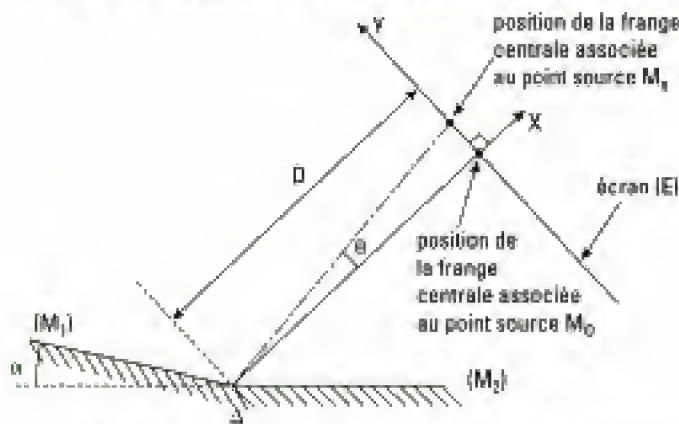
$$-\frac{e}{2} \leq s \leq \frac{e}{2}$$

La fente source étant de largeur faible en pratique devant la focale f de (L), on a aussi :

$$\theta \approx \frac{s}{f}$$

Sur cette figure, on observe que les rayons parallèles issus de (L) ont tourné d'un angle θ autour de l'axe (OZ) perpendiculaire au plan de figure. Les rayons réfléchis par les miroirs de Fresnel ont donc eux aussi tourné d'un angle θ autour du même axe, et il en est de même pour le centre de la figure d'interférences observée sur l'écran (E).

Nous pouvons illustrer la situation correspondante par une deuxième figure :



La frange centrale s'est ici déplacée de la distance $D \cdot \theta$ soit $\frac{D \cdot s}{f}$ et se situe donc à l'ordonnée :

$$y = \frac{D \cdot s}{f}.$$

Les résultats de l'exercice 10 permettent d'obtenir alors l'expression de l'intensité lumineuse élémentaire $dI(M)$ due à la bande source primaire de largeur ds centrée autour du point source M_0 en un point M de l'écran d'ordonnée y sur l'axe Y (lorsque la frange centrale est à la position $y = 0$) :

$$dI(M) = \frac{2I_0}{e} \cdot \left[1 + \cos \left[\frac{4\pi}{\lambda} \cdot \left(y - \frac{D \cdot s}{f} \right) \cdot \sin \alpha \right] \right] ds$$

où I_0 désigne l'intensité produite en M par la fente source primaire dont l'onde émise ne parcourt qu'un seul des deux bras de l'interféromètre. Soit en introduisant l'interfrange i :

$$dI(M) = \frac{2I_0}{e} \cdot \left[1 + \cos \left[\frac{2\pi}{i} \left(y - \frac{D \cdot s}{f} \right) \right] \right] \cdot ds, \quad \text{avec : } i = \frac{\lambda}{2 \sin \alpha}.$$

L'intensité lumineuse totale en un point M est obtenue en sommant les intensités dues à chaque point source de S qui sont incohérents entre eux :

$$I(M) = \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} dI(M) = \frac{2I_0}{e} \cdot \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \left[1 + \cos \left[\frac{2\pi}{i} \left(y - \frac{D \cdot s}{f} \right) \right] \right] \cdot ds$$

soit :

$$I(M) = \frac{2I_0}{e} \cdot \left[e + \frac{\sin \left[\frac{2\pi}{i} \left(y - \frac{D \cdot e}{2f} \right) \right] - \sin \left[\frac{2\pi}{i} \left(y + \frac{D \cdot e}{2f} \right) \right]}{-\frac{2\pi \cdot D}{i \cdot f}} \right].$$

Et finalement :

$$I(M) = 2I_0 \cdot \left[1 + \frac{\sin \left(\frac{\pi \cdot D \cdot e}{i \cdot f} \right)}{\frac{\pi \cdot D \cdot e}{i \cdot f}} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{i} \cdot y \right) \right] \quad \text{avec : } i = \frac{\lambda}{2 \sin \alpha}.$$

• Expression du degré de cohérence spatial de la fente source :

En utilisant la définition donnée en cours, on obtient :

$$\gamma(e) = \frac{\sin \left(\frac{\pi \cdot D \cdot e}{i \cdot f} \right)}{\frac{\pi \cdot D \cdot e}{i \cdot f}} = \boxed{\text{sinc} \left(\frac{\pi \cdot D \cdot e}{i \cdot f} \right)}.$$

b) • Condition quantitative pour une bonne visibilité

Il faut dans ce cas avoir un bon contraste C pour la figure d'interférences et nous avons indi-

qué en cours que $C = |\gamma|$. On doit donc avoir en pratique $\frac{\pi \cdot D \cdot e}{i \cdot f} < \pi$. Ainsi :

$$\boxed{e < \frac{i \cdot f}{D}}.$$

• Application numérique

Avec $i = \frac{\lambda}{2 \sin \alpha}$, il vient :

$$e < \frac{\lambda \cdot f}{2D \cdot \sin \alpha} = \frac{0,6 \cdot 10^{-6} \times 0,5}{2 \times 2,5 \times \sin(3 \cdot 10^{-4})} = 0,2 \text{ mm.}$$

Commentaire : cette valeur est faible, aussi, en pratique, il sera nécessaire d'augmenter un peu l'épaisseur de la fente afin d'obtenir une luminosité satisfaisante quitte à diminuer le contraste de la figure d'interférences.

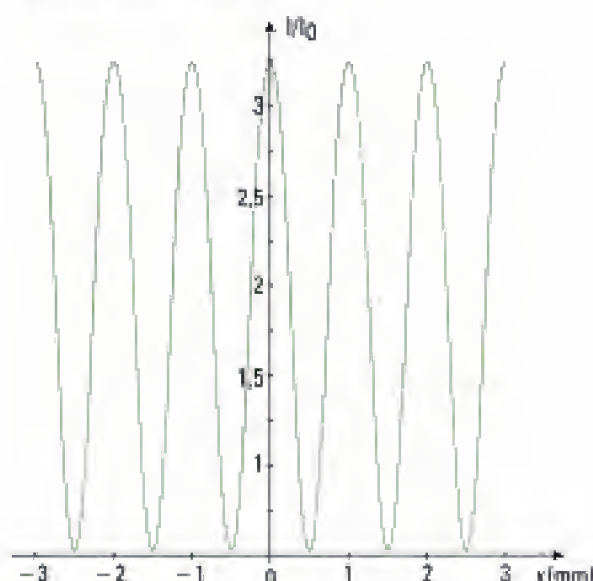
c) On commence par calculer γ pour $e = 0,1 \text{ mm}$:

$$\gamma = \text{sinc} \left(\frac{\frac{\pi \times 2,5 \cdot 10^{-4}}{6 \cdot 10^{-7}} \times 0,5}{2 \sin(3 \cdot 10^{-4})} \right) = 0,64.$$

Ce qui permet d'exprimer les maxima et les minima d'intensité lumineuse :

$$I_{\text{max}}(M) = 2I_0 \cdot (1 + \gamma) = 3,28 I_0 \quad \text{et} \quad I_{\text{min}}(M) = 2I_0 \cdot (1 - \gamma) = 0,72 I_0.$$

Ce qui conduit à la courbe représentée ci-dessous :



d) Il y a brouillage des franges d'interférences lorsque γ s'annule. Le premier brouillage a lieu pour :

$$\frac{\pi \cdot D \cdot e}{i \cdot f} = \pi, \text{ c'est-à-dire : } e = \frac{i \cdot f}{D} = \frac{\lambda \cdot f}{2 \cdot \sin \alpha \cdot D}.$$

$$A.N. : e = \frac{6 \cdot 10^{-7} \times 0,5}{2 \times \sin(3 \cdot 10^{-4}) \times 2,5} = 2 \cdot 10^{-4} = 0,2 \text{ mm.}$$

e) Si on élargit la fente légèrement au-delà de la valeur précédemment calculée, γ devient négatif. On observe ainsi une inversion du contraste : les franges claires prennent la position des franges sombres correspondant au cas $\gamma > 0$, et inversement.

Interférences non localisées à deux ondes

Interféromètre de Michelson

Cohérence temporelle

Introduction

Nous envisageons maintenant le cas des interférences non localisées produites par l'interféromètre de Michelson en donnant sa structure et ses principaux modes d'utilisation et en indiquant les équivalents simples de ces situations. Nous considérerons ensuite le cas des interférences à deux ondes en lumière non monochromatique, ce qui constituera une approche quantitative de la notion de cohérence temporelle déjà rencontrée au chapitre 1. Nous pourrions alors aborder le cas des interférences en lumière blanche.

Plan du chapitre 4

A. Interféromètre de Michelson : description, réglages et équivalence à un système à deux sources cohérentes	132
B. Interféromètre de Michelson réglé en coin d'air et éclairé par une source ponctuelle : franges rectilignes non localisées	137
C. Interféromètre de Michelson réglé en lame d'air à faces parallèles et éclairé par une source ponctuelle : franges annulaires non localisées	141
D. Interférences de deux ondes en lumière non monochromatique : cohérence temporelle	143
E. Interférences avec une source de lumière blanche	150
Méthodes	
L'essentiel ; mise en œuvre	152
Énoncés des exercices	159
Indications	163
Solutions des exercices	164

Dans ce chapitre concernant les interférences non localisées obtenues avec un interféromètre de Michelson, jusqu'au paragraphe D., nous supposons que la cohérence temporelle de la source qui éclaire l'interféromètre est suffisante pour ne pas limiter l'observation des interférences. Ceci signifie que la différence de marche est toujours inférieure à la longueur de cohérence L_c de la source : $\delta(M) < L_c = c\tau_c$.

A. Interféromètre de Michelson : description, réglages et équivalence à un système à deux sources cohérentes

A.1. Description sommaire de l'appareil

1. Michelson (1852 – 1931), Prix Nobel 1907 pour ses recherches expérimentales en physique. En 1881, il a mesuré avec une très grande précision la vitesse de la lumière (dispositif du miroir tournant de Foucault). L'expérience de Michelson et Morley (1887) a montré l'invariance de la vitesse de la lumière en utilisant un interféromètre dit « de Michelson ». En 1892 à Sèvres, il a construit un interféromètre permettant la définition du mètre par interférométrie.

2. Pour ce qui est de la réalisation pratique d'une source ponctuelle, voir l'exercice 9.

L'interféromètre de Michelson¹ est habituellement utilisé avec une source étendue, car ses propriétés de cohérence spatiale sont excellentes, s'il est dans la configuration du paragraphe C. L'étude de la cohérence temporelle des sources s'en trouve facilitée. Il peut cependant être utilisé avec une source ponctuelle S^2 et se comporte alors comme un diviseur de front d'onde. Ce seul cas est envisagé dans ce chapitre, ce qui permet une bonne approche de la compréhension de cet interféromètre qui est constitué de trois parties distinctes (figure 1) : une lame séparatrice (S_p) et deux miroirs plans (M_1) et (M_2) en forme de disques, à peu près perpendiculaires entre eux, de diamètre environ 2 cm.

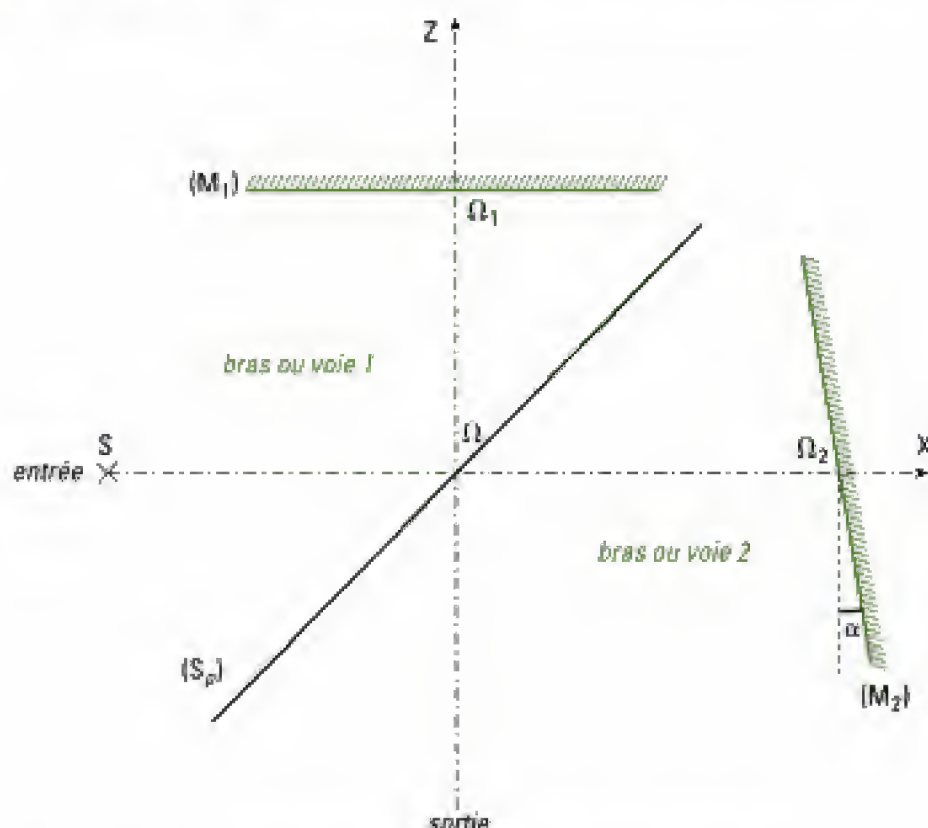


Fig. 1 – Schéma d'ensemble de l'interféromètre de Michelson.

Dans les dessins concernant l'interféromètre de Michelson, justes de par les constructions géométriques, certaines proportions sont volontairement exagérées (séparatrice, angle entre les miroirs par exemple), d'autres sont sous-évaluées (distances $\Omega\Omega_1$ et $\Omega\Omega_2$...), ceci afin de permettre une meilleure lisibilité et compréhension.

1. Nous verrons par la suite qu'il peut faire l'objet de réglages très fins. Nous choisissons de nommer (M_1) le miroir fixe et (M_2) le miroir mobile. On trouve aussi les appellations respectives (M_2) et (M_1) pour ces miroirs ; adapter dans ce cas les notations.

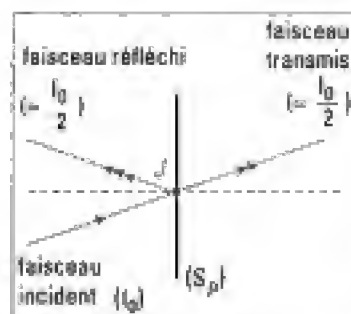


Fig. 2 – Action d'une lame séparatrice (S_p) sur un faisceau incident. On note la séparation du faisceau incident en un faisceau transmis et un faisceau réfléchi.

2. La structure de cette lame, dite aussi semi-transparente, et ses conséquences sur le faisceau incident seront reprises dans la partie Travail Pratique du chapitre suivant.

(M_1) est un miroir quasi-fixe¹. Pour se repérer sur l'interféromètre de Michelson, nous distinguons trois directions particulières matérialisées par les axes du trièdre orthonormé direct (ΩXYZ) . ΩX est quasiment la médiatrice de (M_1) et ΩZ est la quasi-médiatrice de (M_1) . (M_2) est un miroir mobile en translation selon X et aussi en rotation autour de Ω, Y ou d'un axe qui lui est parallèle. Ω est en quelque sorte « le centre » de l'interféromètre sans que pour autant ce point ait une importance déterminante dans les expérimentations.

La source S est souvent supposée placée sur la droite ΩX . L'écart $e = \Omega\Omega_2 - \Omega\Omega_1$ entre les deux miroirs peut être positif, négatif ou nul. L'entrée de l'interféromètre se situe du côté des X négatifs et la sortie du côté des Z négatifs.

La lame séparatrice (S_p) est une lame semi-réfléchissante qui réfléchit environ la moitié du flux lumineux incident et transmet l'autre moitié, grâce aux phénomènes de réflexion et de transmission intervenant à la séparation de deux milieux² (figure 2). La présence de la lame séparatrice classe l'interféromètre de Michelson dans la catégorie des *diviseurs d'amplitude*. Enfin, nous supposons que l'interféromètre de Michelson travaille dans l'air, milieu supposé non dispersif, dont l'indice n est considéré égal à l'unité.

A.2. Parcours de la lumière dans l'interféromètre

Les miroirs sont supposés presque perpendiculaires l'un à l'autre et font entre eux un angle voisin de 90° , à α près. Cet angle vaut $\frac{\pi}{2} + \alpha$ dans le cas de la figure 1.

La lumière qui provient de la source S rencontre la séparatrice (S_p) qui divise en J (figure 2) le faisceau incident en un faisceau transmis vers le miroir (M_2) et un faisceau réfléchi vers le miroir (M_1) . Dans les représentations du dispositif, (S_p) , (M_1) et (M_2) sont toujours supposés perpendiculaires au plan de figure qui est celui de la feuille. Le tracé du parcours de la lumière dans l'interféromètre utilise les lois de l'optique géométrique vues en première année.

• Tracé dans le premier bras de l'interféromètre

Nous considérons un rayon issu de S qui atteint la séparatrice (S_p) au point J_1 et nous suivons son parcours ultérieur (figure 3).

Le parcours $SJ_1K_1N_1M$ commence par la réflexion sur (S_p) en J_1 ; le rayon réfléchi J_1K_1 semble provenir de S' symétrique de S par rapport à (S_p) . Ce rayon se réfléchit en K_1 sur (M_1) en semblant provenir de S_1 qui est l'image de S' donnée par le miroir (M_1) .

Le long du bras 1 nous avons donc :

$$S \xrightarrow{(S_p)} S' \xrightarrow{(M_1)} S_1.$$

• Tracé dans le deuxième bras de l'interféromètre

Nous considérons un rayon issu de S qui atteint la séparatrice (S_p) au point J_2 et nous suivons son parcours ultérieur (figure 4).

Le parcours $SJ_2K_2N_2M$ commence par la traversée de (S_p) en J_2 ; le rayon transmis se réfléchit en K_2 sur (M_2) en semblant provenir de S'' qui est l'image de S donnée par le miroir (M_2) . Le rayon K_2N_2 se réfléchit ensuite en N_2 en semblant provenir de S_2 symétrique de S'' par rapport à (S_p) .

Le long du bras 2 nous avons donc :

$$S \xrightarrow{(M_2)} S'' \xrightarrow{(S_p)} S_2.$$

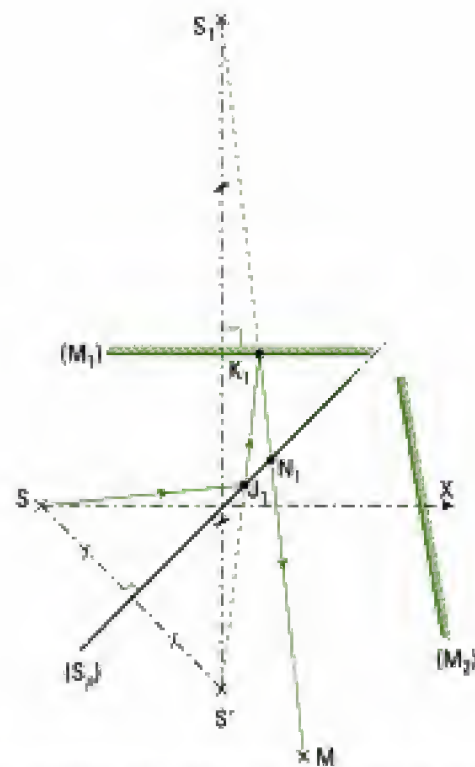


Fig. 3 – Le long du premier bras, trajet d'un rayon lumineux issu de la source S.

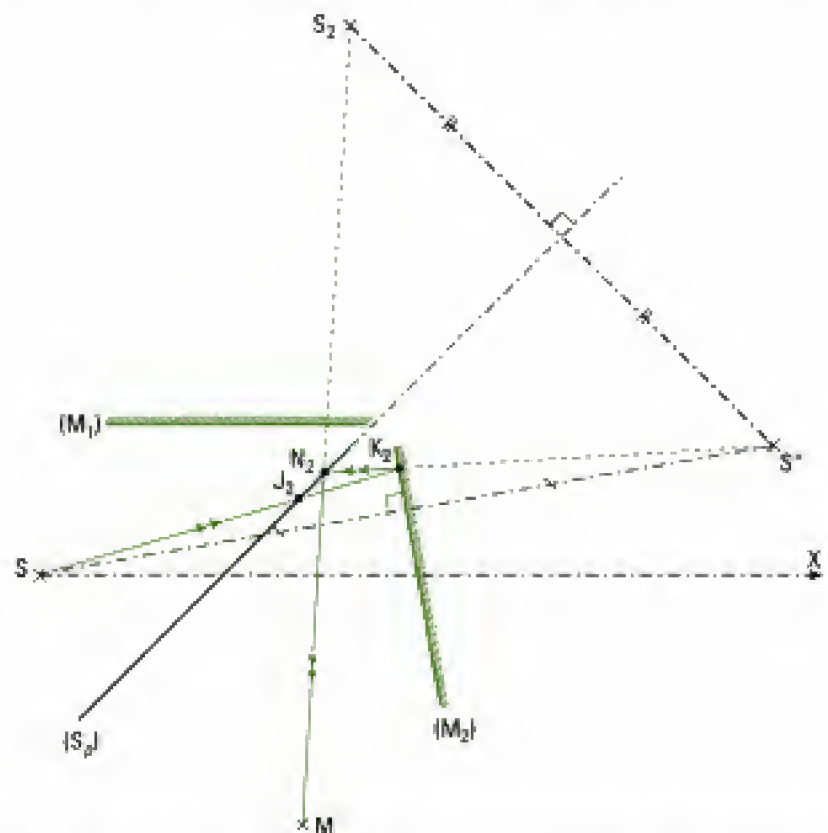


Fig. 4 – Le long du deuxième bras, trajet d'un rayon lumineux issu de la source S.

• Tracé simultané dans les deux bras

En traçant les trajets des deux rayons SJ_1 (parcours $(SJ_1K_1N_1M)$) et SJ_2 (parcours $(SJ_2K_2N_2M)$), nous obtenons la figure 5.

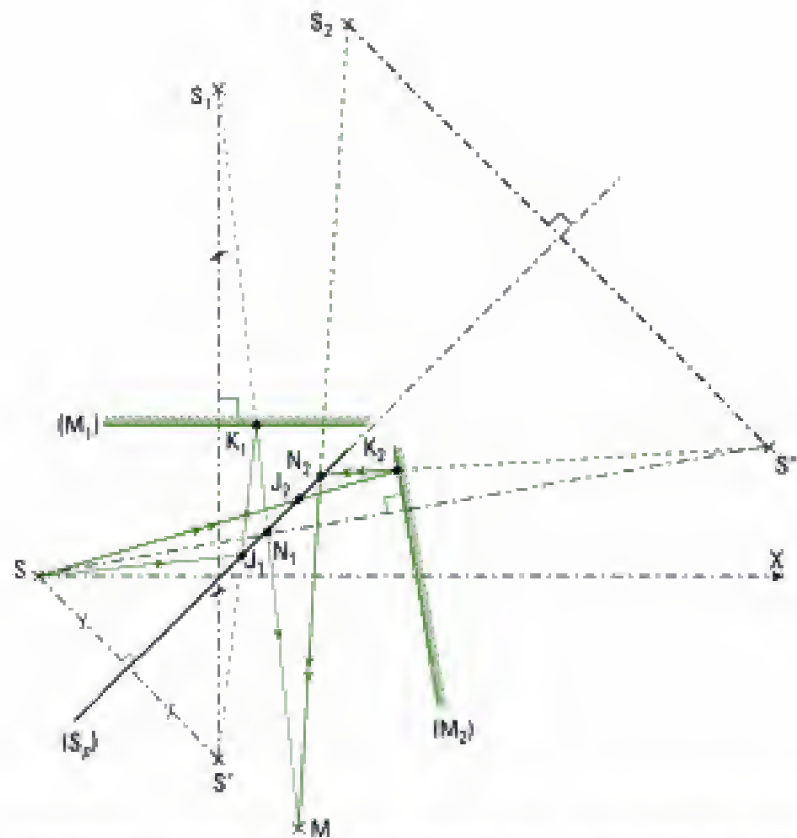


Fig. 5 – Montage en coin d'air : tracé du parcours de deux rayons issus de la source S et qui interfèrent au point M¹.

1. Pour un point M donné du champ d'interférences, il n'existe que deux rayons issus de S qui interfèrent en ce point. Ainsi, les constructions effectuées dans les figures 3 et 4 ont été réalisées en choisissant préalablement ce point M.

2. Nous verrons dans la partie pratique au chapitre 5 que ce n'est pas toujours le cas.

A.3. Système optique équivalent, à deux sources cohérentes

Nous venons de construire géométriquement les sources S_1 et S_2 . Évaluons et comparons les chemins optiques dans le système.

Il se pose la question du déphasage lors de la réflexion sur les miroirs et la séparatrice. *A priori*, le nombre de ces réflexions peut être supposé égal sur chaque bras, de sorte que lors du calcul de la différence de chemin optique ces quantités s'annulent².

• Chemin optique dans le premier bras

De S vers M par le bras 1, le chemin optique est :

$$(SJ_1K_1N_1M) = (SJ_1) + (J_1K_1) + (K_1N_1) + (N_1M).$$

Or, nous avons vu au chapitre 3 que la relation de point image S' à point objet S dans un miroir était telle que $(SS') = 0$. Nous avons donc :

$$(SJ_1) = (S'J_1) \text{ et } (S'K_1) = (S_1K_1).$$

Ainsi, $(SJ_1) + (J_1K_1) = (S'J_1) + (J_1K_1) = (S'K_1) = (S_1K_1)$, et :

$$(SJ_1K_1N_1M) = (S_1K_1) + (K_1N_1) + (N_1M) = (S_1M).$$

• Chemin optique dans le deuxième bras

De la même manière, dans le bras 2 : $(SJ_2K_2N_2M) = (S_2M)$.

• Équivalence à un système à deux sources cohérentes

L'interféromètre de Michelson éclairé par une source ponctuelle est donc équivalent à deux sources cohérentes et synchrones S_1 et S_2 qui interfèrent en M. Les interférences sont non localisées : elles existent partout où les faisceaux issus de S_1 et S_2 se recouvrent.

Les résultats du chapitre 3 sont donc applicables à la situation équivalente suivante :

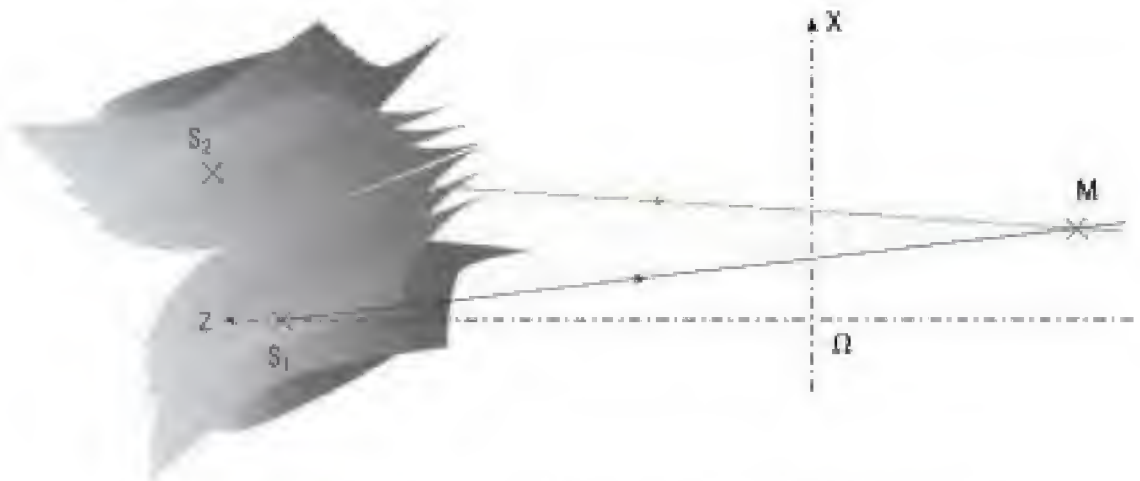


Fig. 6 – Schéma équivalent à l'interféromètre de Michelson éclairé par une source ponctuelle : sources secondaires S_1 et S_2 .



Fig. 7 – Franges annulaires.



Fig. 8 – Franges hyperboliques.

• Figures d'interférences observées

L'allure des figures d'interférences dépend de la position de l'écran. Comme aux paragraphes A.2.5. et A.2.6. du chapitre 3, une observation sur un écran parallèle à l'axe des sources conduit à l'observation de franges ayant la forme d'hyperboles (figure 8) et une observation sur un écran perpendiculaire à l'axe des sources conduit à l'observation de franges circulaires ayant la forme d'anneaux (figure 7).

Cependant, pour une position donnée des sources S_1 et S_2 , il ne faut pas s'attendre à observer toutes les figures d'interférences prévues par l'équation $S_2M - S_1M = \text{cte}$. Ainsi, dans la disposition de la figure 5, il n'y a aucune possibilité d'observer les franges annulaires sur un écran, car cet écran se trouverait en dehors du champ d'interférences limité par les deux miroirs et la séparatrice (voir aussi la figure 12c).

A.4. Géométries ou montages classiques de l'interféromètre de Michelson

Cet interféromètre permet de déplacer la source S_2 en agissant sur la position du miroir (M_2) par rotation (modification de l'angle α) et par translation (modification de la distance e) ; ceci résout la difficulté signalée au paragraphe précédent et rend possible les diverses observations.

Il existe ainsi deux géométries, ou montages, pour l'interféromètre de Michelson :

- l'angle α et la distance e sont faibles ; il s'agit du montage dit « en coin d'air » ;
- l'angle α est nul et la distance e est faible ; il s'agit du montage dit « en lame d'air à faces parallèles ».

Nous abordons maintenant successivement chacun de ces montages.

1. La justification de ces appellations sera donnée dans les paragraphes qui suivent.

B. Interféromètre de Michelson réglé en coin d'air et éclairé par une source ponctuelle : franges rectilignes non localisées

B.1. Schéma équivalent au montage en coin d'air

• Équivalence par pliage

Le montage en coin d'air est en fait celui étudié à la figure 5, dont la compréhension physique est limitée par les constructions. Il est possible de donner un montage équivalent plus simple par repliement de la figure géométrique formée par le parcours de la lumière et les trois parties de l'interféromètre. Cette opération de pliage, par symétrie par rapport à la séparatrice, laisse les chemins optiques inchangés et permet de ne plus tenir compte de la séparatrice.

• Pliage et schéma équivalent

Dans cette opération, S vient en S' (figure 9).

Le parcours $(SJ_1K_1N_1M)$ est remplacé par le parcours $(S'J_1K_1N_1M)$.

De même (M_2) vient en (M'_2) et K_2 vient en K'_2 par symétrie par rapport à (S_p) . Le trajet (SK_2) est donc remplacé par le trajet $(S'K'_2)$.

Le parcours $(SJ_2K_2N_2M)$ est remplacé par le parcours $(S'K'_2M)$ (figure 10). Une fois cette équivalence réalisée, nous obtenons le schéma équivalent de la figure 10 où l'on note que :

Le dispositif interférentiel est équivalent à une lame² d'air virtuelle, en forme de coin de sommet A , comprise entre les deux miroirs (M_1) et (M'_2) .

1. En terme de chemin optique, l'opération de pliage est équivalente à : $(SJ_1) = (S'J_1)$ puisque $(SS') = 0$ (cf. chapitre 3 paragraphe B.1.5). S' est une source fictive.

2. En effet, une lame n'a pas obligatoirement ses faces parallèles.

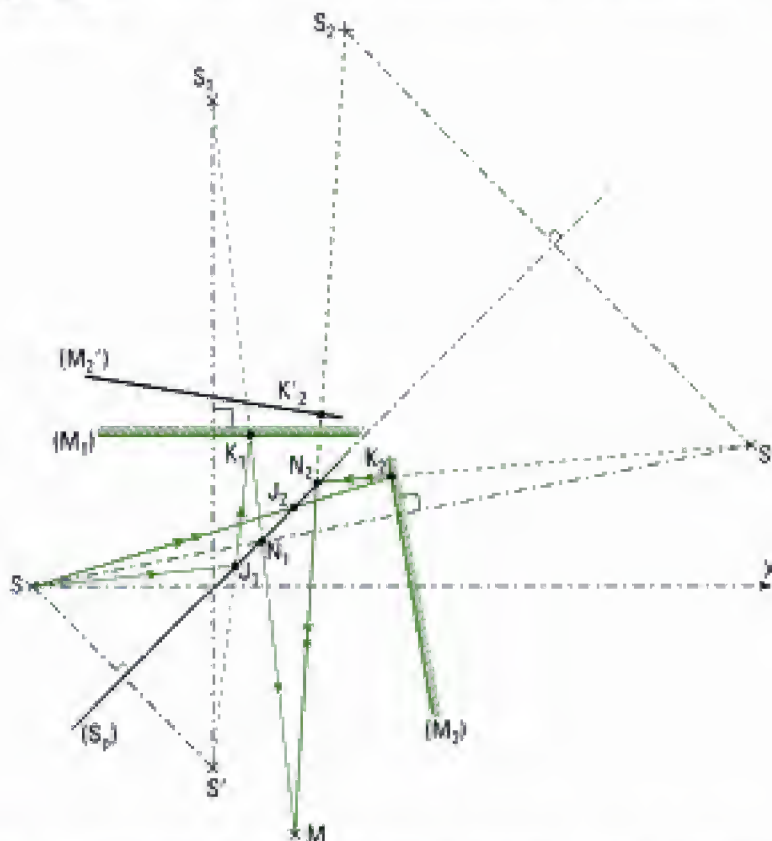


Fig. 9 – Repliement de l'interféromètre de Michelson : noter la présence de (M'_2) , symétrique de (M_2) , et K'_2 symétrique de K_2 par rapport à la séparatrice.

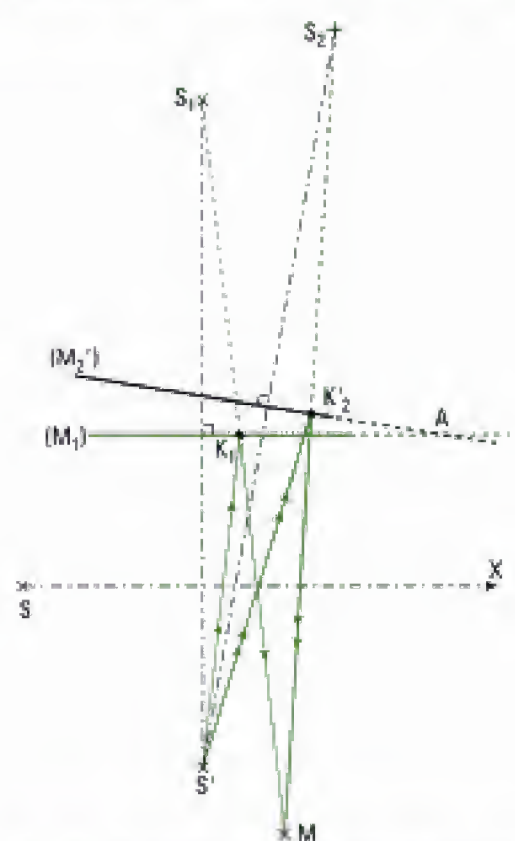


Fig. 10 – Repliement terminé : équivalence de l'interféromètre de Michelson à un coin d'air.

Nous avons donc montré l'équivalence suivante :

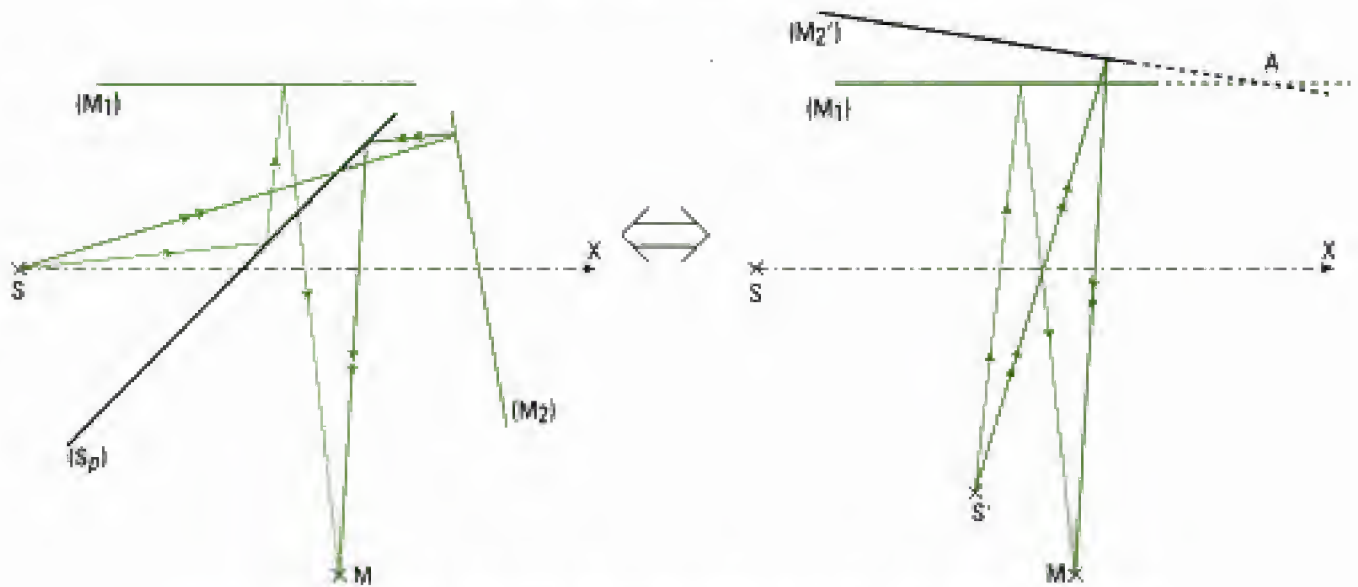


Fig. 11 – Équivalence de l'interféromètre de Michelson à un coin d'air formé par (M₁) et (M₂').

B.2. Interfrange et intensité lumineuse

Nous nous plaçons dans le cas où l'angle α entre les deux miroirs est un petit angle.

1. $i = \frac{\lambda_0 D}{na}$ avec ici $n = 1$; D est la distance entre le milieu des sources et l'écran d'observation ; a est la distance entre les sources (figure 12b).

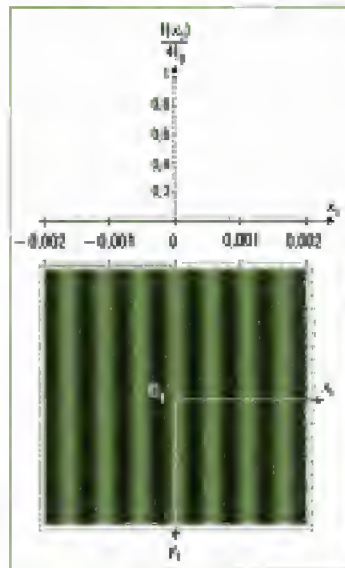


Fig. 12a – Courbe représentant l'intensité lumineuse $I(x_1)$ et relevé de la figure d'interférences observable au voisinage du point O₁ sur l'écran (E). (Lumière verte du mercure avec filtre interférentiel ; $\lambda_0 = 546,1 \text{ nm}$; $S_1 S_2 = a = 1 \text{ mm}$; $D = 1 \text{ m}$). La graduation est en mètres .

• Exploitation de l'équivalence du montage à deux sources secondaires

Comme il s'agit d'interférences à deux sources secondaires, à partir des résultats des chapitres 2 et 3, dans le cas où l'écran (E) est parallèle à la droite qui porte les sources, au voisinage du point O₁, **les franges observées sont rectilignes** (figure 12a) et nous pouvons exprimer l'interfrange sous la forme habituelle :

$$i = \frac{\lambda_0 D}{a} \quad ,$$

ainsi que l'intensité lumineuse :

$$I = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi x_1}{i} \right) \right] .$$

• Expression de l'interfrange et de l'intensité lumineuse en fonction des données propres à la situation physique

Exprimons la distance a (figure 12b).

Les droites passant par S'S₁ et S'S₂ étant respectivement perpendiculaires à (M₁) et (M₂'), elles font entre elles l'angle α .

Par ailleurs, les deux miroirs (M₁) et (M₂') étant respectivement plans médiateurs de S'S₁ et S'S₂, leur point d'intersection A est le centre d'un cercle qui passe par S', S₁ et S₂, dont le rayon est appelé L.

La médiatrice OO₁ du segment S₁S₂ passe donc par le centre A du cercle.

De plus l'angle $\widehat{S_1 A S_2} = 2\alpha$ car il est l'angle au centre de l'arc $\widehat{S_1 S_2}$ qui est lui même sous tendu par l'angle $\widehat{S_1 S' S_2}$ dont la valeur est α .

Cet angle étant petit, AO = AS₂ = L et nous en déduisons que :

$$S_1 S_2 = a = 2\alpha L .$$

L'interfrange s'écrit alors :

$$i = \frac{\lambda_0 D}{a} = \frac{\lambda_0 (L + AO_1)}{2L\alpha}$$

et l'intensité lumineuse s'exprime selon :

$$I = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi x_1}{i} \right) \right] = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{4\pi L\alpha x_1}{\lambda_0 (L + AO_1)} \right) \right]$$

1. Avec $L = 30$ cm, cas courant,

$$\alpha = \frac{a}{2L} = \frac{10^{-3}}{2 \times 0,30} = 6',$$

Sur le dessin, l'angle α a été volontairement exagéré pour obtenir une meilleure lisibilité. Dans le cas réel, S_1, S_2 est quasi parallèle à (M_1) et le point O_1 est dans le champ d'interférences défini à la figure 12c.

Dans ce type d'interféromètre, on peut obtenir facilement $a < 1$ mm en agissant sur α , ce qui dépasse les possibilités de l'interféromètre de Young.

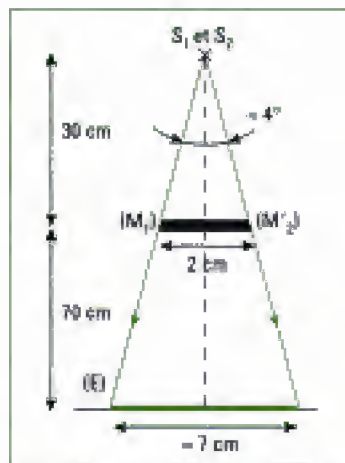


Fig. 12c – Dans la pratique, S_1 et S_2 sont proches ainsi que (M_1) et (M'_1) . Avec des distances typiques, le champ d'interférences est réduit : 7 cm sur un écran placé à 0,7 m des miroirs.

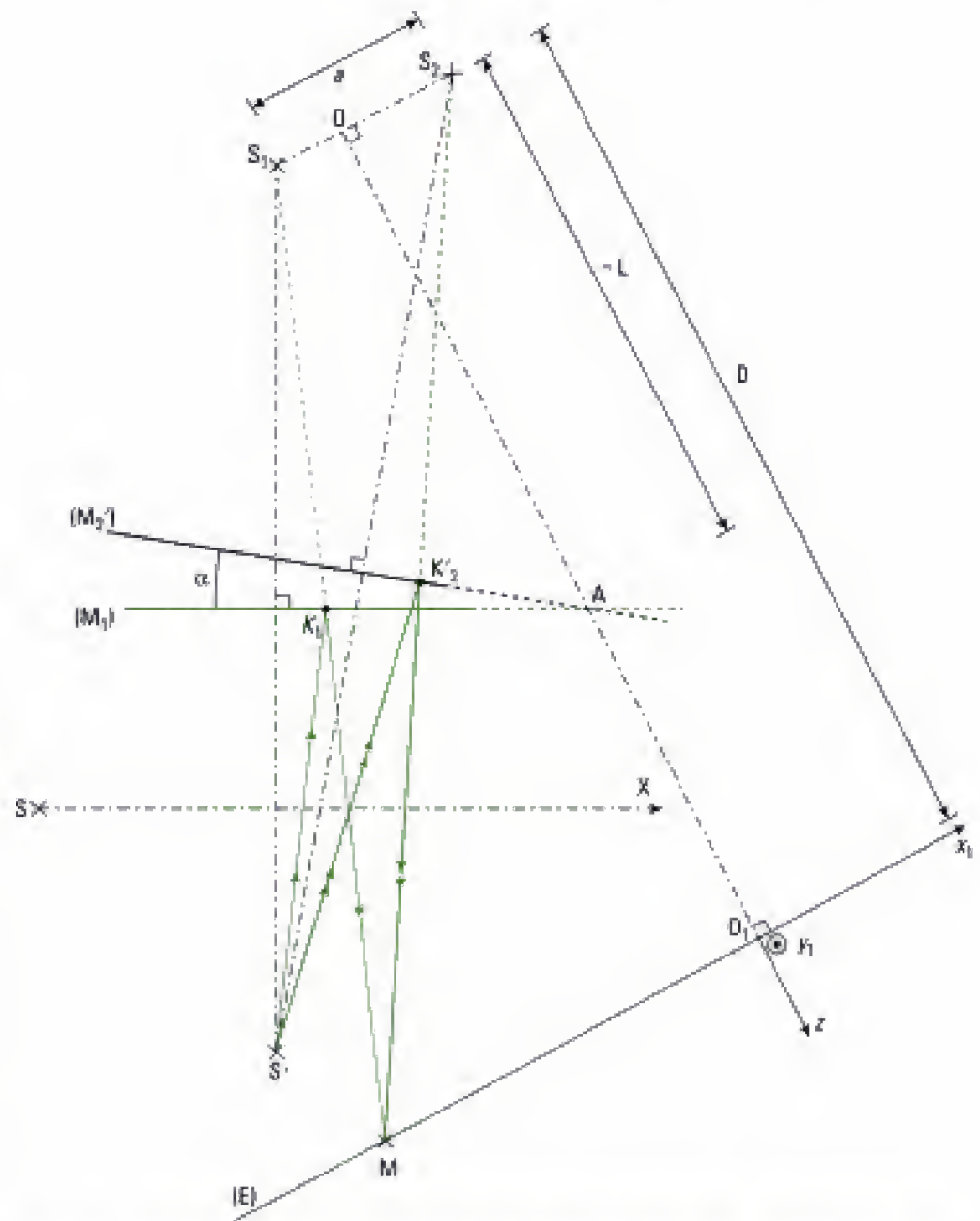


Fig. 12b – Parcours de la lumière dans l'interféromètre de Michelson réglé en coin d'air¹.

Remarques

1) L'analogie du calcul précédent avec celui concernant les miroirs de Fresnel (cf. chapitre 3) est flagrante. Elle n'a rien d'étonnant car, par équivalence, il s'agit ni plus ni moins que d'interférences dues à la réflexion sur deux miroirs (M_1) et (M'_2) faisant entre eux l'angle α .

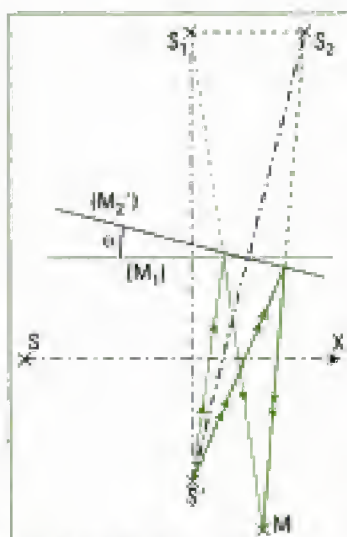


Fig. 13 – Similitudes entre un interféromètre de Michelson monté en coin d'air et les miroirs de Fresnel.

2) De même, si $L \rightarrow \infty$ alors $i \rightarrow \frac{\lambda_0}{2\alpha}$, résultat que nous avons établi dans le

cas de deux ondes planes qui interfèrent (chapitre 3, paragraphe A.1).

3) Si ce montage est équivalent à celui des miroirs de Fresnel, il y a cependant une grande différence : la lame d'air est virtuelle et le miroir (M'_2) n'est pas matériellement un miroir.

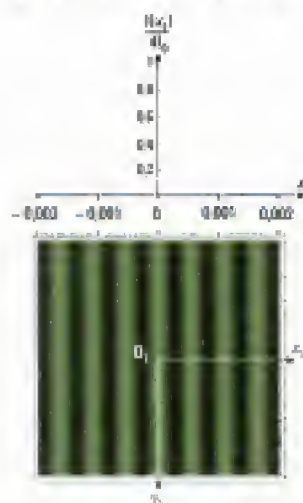
Ainsi, les miroirs (M_1) et (M'_2) peuvent se croiser, se superposer, au gré du mouvement de (M_2) en rotation ou en translation, sans gêner la réflexion de la lumière sur les miroirs réels.

4) La position du miroir équivalent (M'_2) dépend de la position du miroir réel (M_2). Ainsi, en rapprochant le miroir (M_2) de S dans la situation de la figure 9, nous obtenons celle de la figure 13 où nous reconnaissons cette fois totalement la configuration «miroirs de Fresnel».

5) Sur chaque miroir, la réflexion s'accompagne d'un même déphasage supplémentaire, que nous n'avons donc pas indiqué. Nous avons aussi passé sous silence les déphasages introduits par la séparatrice sur laquelle il y a pourtant des réflexions, en nombre apparemment égal. Il n'y aurait donc là aussi aucune différence de marche, en théorie... Dans la pratique, la situation n'est pas si simple et des déphasages parasites existent.

Application 1 Comparaison de valeurs pour l'interfrange

À partir des données fournies dans la légende de la figure 12a et de l'allure de la figure d'interférences sur l'écran, comparer la valeur théorique de l'interfrange et celle relevée sur l'écran.



$\lambda_0 = 546,1 \text{ nm}$
 $D = 1 \text{ m}$
 $a = 1 \text{ mm}$

Solution

• Une première valeur s'obtient à partir des données λ_0 , D et a . Le calcul conduit à :

$$i_{\text{calc}} = \frac{\lambda_0 D}{a} = \frac{546,1 \cdot 10^{-9} \times 1}{10^{-3}} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m.}$$

• Pour la mesure directe de l'interfrange sur l'écran, nous comptons 7 intervalles séparant des franges sombres, pour une distance de 3,9 mm lue sur l'échelle graduée (utiliser pour cela l'échelle du dessin donnée par la correspondance entre la largeur du champ d'interférences réel (4 mm) et la largeur mesurée sur le document).

L'interfrange sur l'écran est donc :

$$i_{\text{écran}} = \frac{3,9 \cdot 10^{-3}}{7} \approx 5 \cdot 10^{-4} \text{ m.}$$

Les deux valeurs obtenues pour l'interfrange sont donc **cohérentes**.

C. Interféromètre de Michelson réglé en lame d'air à faces parallèles et éclairé par une source ponctuelle : franges annulaires non localisées

Les miroirs (M_1) et (M_2) font entre eux un angle droit. L'angle α est nul et la distance e est faible (cf. paragraphe A.4).

• Équivalence par pliage

En construisant les trajets des deux rayons incidents SJ_1 , le long de ($SJ_1K_1N_1M$) et SJ_2 , le long de ($SJ_2K_2N_2M$), issus de la source ponctuelle S , nous obtenons (figure 14) :

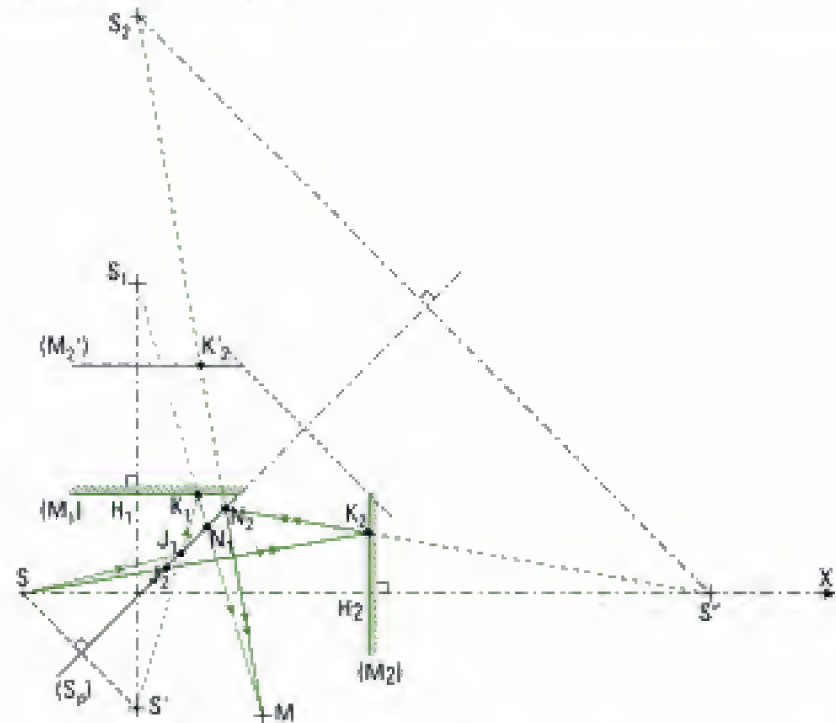


Fig. 14 – Montage en lame d'air à faces parallèles : tracé du parcours de deux rayons issus de la source S et qui interfèrent au point M .

Nous cherchons un montage équivalent à celui de la figure 14 par repliement de la figure géométrique formée par le parcours de la lumière et les trois parties de l'interféromètre, comme au paragraphe B.

• Pliage

Dans cette opération de pliage par symétrie autour de la séparatrice (S_p), S vient en S' .

Le parcours ($SJ_1K_1N_1M$) est remplacé par le parcours ($S'J_1K_1N_1M$) (figure 14). De même (M_2) vient en (M'_2) et K_2 vient en K'_2 par symétrie par rapport à (S_p). Le trajet (SK_2) est donc remplacé par le trajet ($S'K'_2$) (figure 15).

Le parcours ($SJ_2K_2N_2M$) (figure 14) est remplacé par le parcours ($S'K'_2M$) (figure 15). Une fois cette simplification réalisée, nous obtenons le schéma équivalent de la figure 15 où l'on note que :

le dispositif interférentiel de Michelson est équivalent à une lame d'air virtuelle comprise entre les deux miroirs (M_1) et (M'_2) parallèles.

Cette lame virtuelle a donc la forme d'une lame à faces parallèles (figure 15).

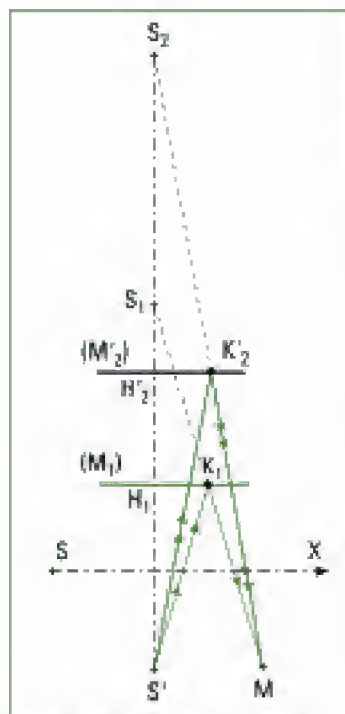


Fig. 15 – Repliement terminé : équivalence de l'interféromètre de Michelson à une lame d'air à faces parallèles.

• Équivalences

Nous avons donc montré les équivalences suivantes :

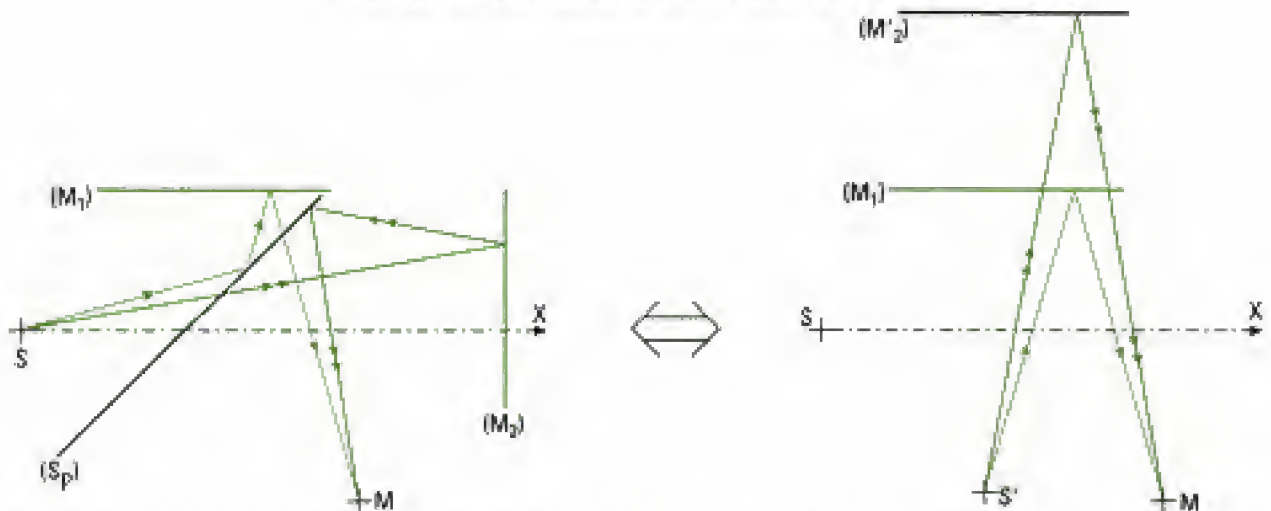


Fig. 16 – Équivalence de l'interféromètre de Michelson à une lame d'air à faces parallèles formée par (M_1) et (M'_2) .

• Exploitation de l'équivalence du montage à deux sources secondaires

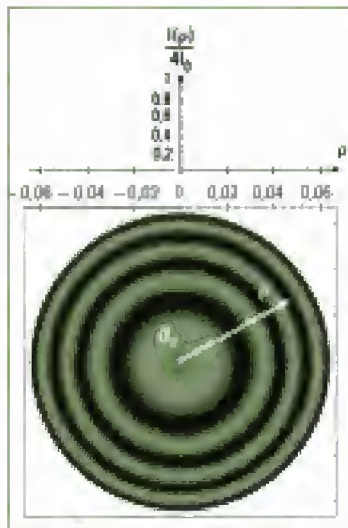


Fig. 17b – Courbe représentant l'intensité lumineuse $I(p)$ et relevé de la figure d'interférences observable sur l'écran (E) au voisinage du point O_2 .

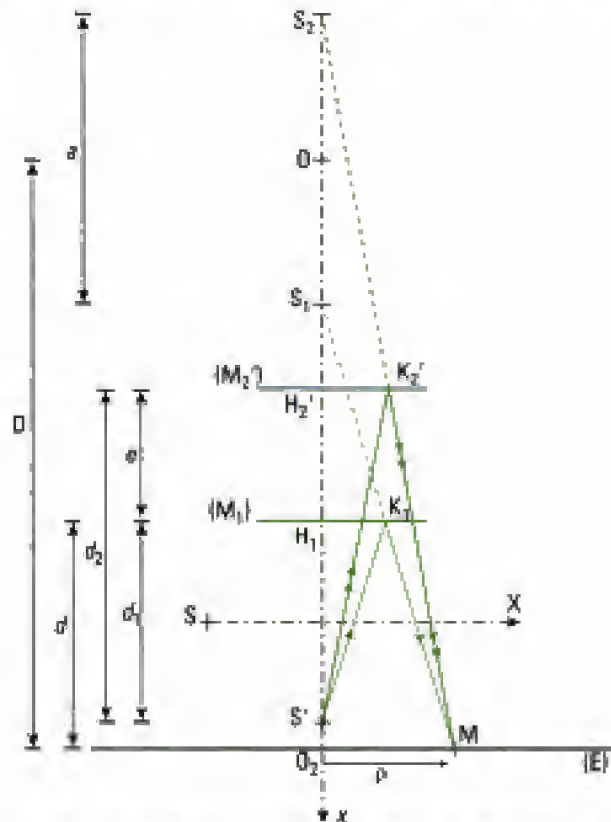


Fig. 17a – Parcours de la lumière dans l'interféromètre de Michelson réglé en lame d'air à faces parallèles.

Dans le champ des miroirs, nous observons les figures d'interférences sur un écran (E) parallèle à la lame d'air et perpendiculaire à la droite portant les sources S_1 et S_2 (figure 17a). Nous savons (chapitre 3, figure 5 et paragraphe A.2.6) que dans ce cas les figures d'interférences sont des anneaux centrés sur le point O_2 situé à l'intersection de la droite S_1S_2 avec l'écran (figure 17b), ce que nous confirmer les symétries de la situation physique¹.

Nous posons : $S'H_1 = d_1$; $S'H_2 = d_2$ et d la distance écran-miroir (M_1) . Les miroirs (M_1) et (M'_2) créent entre eux une lame d'air à faces parallèles qui par définition a l'épaisseur $e = d_2 - d_1$.

1. L'interféromètre de Michelson permet d'observer les franges en forme d'anneaux à la différence des interféromètres de Young et Fresnel.

• Expression de l'intensité lumineuse

Pour un point M de l'écran à la distance ρ du centre des anneaux, nous avons montré au chapitre 3 paragraphe A.2.6 que la différence de marche est¹ :

$$\delta(M) = a \left(1 - \frac{\rho^2}{2D^2} \right)$$

avec $D = OO_2$ la distance entre le point milieu de S_1S_2 et le point O_2 . L'intensité lumineuse dans le champ d'interférences se met alors sous la forme :

$$I(M) = I(\rho) = 2I_0 \left[1 + \cos \left[2\pi \frac{a}{\lambda_0} \left(1 - \frac{\rho^2}{2D^2} \right) \right] \right]$$

puisque $\Delta\varphi_s = 0$ et si les diverses réflexions n'introduisent pas un terme de phase supplémentaire².

Reste à exprimer a et D en fonction des paramètres connus du montage.

Ainsi, $a = S_1S_2 = S'S_2 - S'S_1 = 2S'H'_2 - 2S'H'_1 = 2(S'H'_2 - S'H'_1) = 2e$.

De même, $D = O_2H_1 + H_1S_1 + S_1O = d + d_1 + e$. Si e est négligeable devant d et d_1 ³, alors : $D \approx d + d_1$. Nous en déduisons :

$$I(\rho) = 2I_0 \left[1 + \cos \left[4\pi \frac{e}{\lambda_0} \left(1 - \frac{\rho^2}{2(d + d_1)^2} \right) \right] \right]$$

D. Interférences de deux ondes en lumière non monochromatique : cohérence temporelle

Les interféromètres utilisés sont supposés travailler dans l'air d'indice $n = 1$ ⁴.

D.1. Cadre de l'étude

L'étude des interférences a été menée jusque là en lumière monochromatique puisque c'est un critère d'obtention des interférences lumineuses. Si la lumière n'est plus monochromatique, ou blanche, de nouveaux phénomènes interviennent⁵. Pour mener cette étude, il faut se dégager des questions de cohérence spatiale qui peuvent jouer sur le contraste des franges⁶. Nous pouvons donc utiliser l'interféromètre de Young, ou celui de Fresnel, de différence de marche $\delta(M) = \frac{ax}{D}$ ⁷, à condition de minimiser les effets de la cohé-

rence spatiale, c'est-à-dire de fermer la fente source. Le phénomène observé est alors peu lumineux.

Pour travailler avec une *source étendue* et obtenir un phénomène lumineux sans problème de cohérence spatiale, il faut utiliser l'interféromètre de Michelson réglé en *lame d'air à faces parallèles* étudié au chapitre suivant : retenons comme montage celui de la figure 17 du chapitre 5 où, avec une lame d'air d'épaisseur $e = X$, la différence de marche au point M intersection de l'écran et de l'axe de la lentille de projection est : $\delta(M) = 2e = 2X$.

Classiquement, sur l'écran (E) l'intensité lumineuse en un point M s'écrit :

$$I(M) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda_0} \right) \right] = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D} \right) \right] = I(x) \text{ (type Young)}$$

$$\text{ou } I(M) = I(X) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{4\pi X}{\lambda_0} \right) \right] \text{ (type Michelson)}$$

I_0 étant l'intensité produite par un seul faisceau.

1. Avec dans ce cas $n = 1$.

2. En pratique, ce terme de phase additionnel est courant dans l'expérimentation avec l'interféromètre de Michelson.

3. En pratique cette condition est réalisée.

4. Cet indice est supposé indépendant de la longueur d'onde.

5. Voir chapitre 3 fin de paragraphe C.

6. Voir chapitre 3 paragraphe C.

7. Relation typique d'un interféromètre à division de front d'ondes : a est la distance entre les sources secondaires, x la position du point M sur l'écran et D la distance des sources à l'écran.

1. Une photodiode semble tout indiquée (voir chapitre 1 paragraphe E.).

2. Grâce notamment à la transformée de Fourier.

3. Par exemple, pour l'élément mercure dans le spectre donné à la figure 7 du chapitre 1, nous observons un doublet dans le jaune ($\lambda_{\text{ja}} = 577 \text{ nm}$ et $\lambda_{\text{ja}} = 579 \text{ nm}$) et un doublet dans le violet.

4. Ceci est vérifié pour le doublet jaune du sodium par exemple.

5. Ce paramètre utilisé par les spectroscopistes, dont l'unité est le m^{-1} , permet en outre des calculs plus simples lors de l'utilisation de la transformée de Fourier.

• Enregistrement de l'intensité lumineuse

Plaçons un photodétecteur¹ au point fixe d'intersection de l'écran et de l'axe de la lentille de projection pour l'interféromètre de Michelson, en un point courant de l'écran d'abscisse x pour l'interféromètre de Young, et faisons varier x ou X . Il est possible, en respectant le temps de réponse du photodétecteur, c'est-à-dire en adaptant la vitesse d'évolution de x ou X , d'enregistrer l'évolution de l'intensité lumineuse en fonction de x ou X .

Ce type d'enregistrement, qui donne l'évolution de $I(\delta)$, est appelé **interférogramme** (figure 20). Il permet d'accéder à la connaissance du spectre de la source (spectroscopie interférentielle)². Dans la suite de ce développement, nous conserverons la grandeur $\delta(M)$ comme variable, pour n'interpréter les résultats qu'en fin de calcul, en fonction de l'interféromètre utilisé.

D.2. Cas d'une source constituée de deux ondes de fréquences voisines : doublet spectral

• Intérêt physique

Ce cas d'étude des interférences en lumière non monochromatique n'est pas un cas d'école : en effet, de nombreuses raies spectrales sont en fait des doublets spectraux composés de deux raies de fréquences voisines, donc de longueurs d'onde très proches³.

• Expression de l'intensité lumineuse

Nous supposons que les ondes émises par chaque composante du doublet ont même amplitude⁴. Chacune des radiations monochromatiques du doublet spectral est émise par la même source ponctuelle S . Ces ondes lumineuses, incohérentes entre elles car $\nu_1 \neq \nu_2$, suivent chacune deux trajets différents dans l'interféromètre et donnent lieu en un point M à un phénomène d'interférences dont l'intensité s'écrit pour chacune d'elles :

$$I_1(\delta(M)) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda_{0_1}} \right) \right] \text{ et } I_2(\delta(M)) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda_{0_2}} \right) \right].$$

La situation est celle de deux sources indépendantes, géométriquement confondues : nous devons donc sommer les intensités lumineuses dues à chaque composante spectrale du doublet (λ_{0_1} et λ_{0_2}).

À ce stade, il est intéressant d'introduire le nombre $\sigma_0 = \frac{1}{\lambda_0}$ ⁵. Ainsi :

$$I_1(M) = 2I_0 [1 + \cos [2\pi\sigma_{0_1} \delta(M)]].$$

La somme des intensités lumineuses s'écrit donc :

$$\begin{aligned} I(M) &= 2I_0 [2 + \cos [2\pi\sigma_{0_1} \delta(M)] + \cos [2\pi\sigma_{0_2} \delta(M)]] \\ &= 4I_0 [1 + \cos [\pi(\sigma_{0_1} - \sigma_{0_2}) \delta(M)] \cos [\pi(\sigma_{0_1} + \sigma_{0_2}) \delta(M)]] \end{aligned}$$

En posant $\Delta\sigma_0 = \sigma_{0_1} - \sigma_{0_2}$ l'écart du doublet, et $\sigma_{\text{moy}} = \frac{\sigma_{0_1} + \sigma_{0_2}}{2}$ le nombre d'onde moyen, il vient :

$$I(M) = 4I_0 [1 + \cos [\pi\Delta\sigma_0 \delta(M)] \cos [2\pi\sigma_{\text{moy}} \delta(M)]]$$

ou

$$I(M) = 4I_0 \left[1 + \gamma(M) \cos \left[2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda_{\text{moy}}} \right] \right]$$

avec $\gamma(M) = \cos [\pi\Delta\sigma_0 \delta(M)]$ et $\lambda_{\text{moy}} = \frac{1}{\sigma_{\text{moy}}}$.

• Analyse de l'expression donnant l'intensité

Nous reconnaissons le terme d'interférence habituel :

$$\cos \left[2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda_{\text{cm}}} \right],$$

multiplié par le *degré de cohérence temporelle* :

$$\gamma(M) = \cos [\pi \Delta \sigma_0 \delta(M)]^1.$$

Or, les nombres d'onde σ_{0_1} et σ_{0_2} étant très proches, la fonction $\cos [\pi (\sigma_{0_1} - \sigma_{0_2}) \delta(M)] = \cos [\pi \Delta \sigma_0 \delta(M)]$ de la variable $\delta(M)$, de « période » $\frac{2}{\Delta \sigma_0}$, varie lentement en fonction de $\delta(M)$ en comparaison de la fonction

$\cos [\pi (\sigma_{0_1} + \sigma_{0_2}) \delta(M)] = \cos [2\pi \sigma_{\text{cm}} \delta(M)]$ de « période » $\frac{1}{\sigma_{\text{cm}}}$, puisque par hypothèse $\Delta \sigma_0 \ll \sigma_{\text{cm}}$.

Comme $\frac{\Delta \sigma_0}{\sigma_{\text{cm}}} \ll 1$, au voisinage du point M, nous définissons un facteur de contraste car durant quelques périodes de la fonction $\cos [2\pi \sigma_{\text{cm}} \delta(M)]$, le degré de cohérence temporelle $\gamma(M)$ varie peu. Dès lors, en supposant $\gamma(M) = \text{cte}$, l'intensité maximale est $I_{\text{max}} = 4I_0 [1 + |\gamma(M)|]$ et l'intensité minimale $I_{\text{min}} = 4I_0 [1 - |\gamma(M)|]$.

Le facteur de contraste s'écrit alors :

$$C = \frac{I_{\text{max}} - I_{\text{min}}}{I_{\text{max}} + I_{\text{min}}} = \frac{8I_0 |\gamma(M)|}{8I_0} = |\gamma(M)|,$$

donc

$$C = |\gamma(M)| = |\cos [\pi \Delta \sigma_0 \delta(M)]|.$$

La « périodicité » $\frac{1}{\Delta \sigma_0}$ du contraste (figure 19) est la moitié de celle du degré de cohérence (figure 18). Traçons $I(M)$ en fonction de $\delta(M)$ (figure 20).

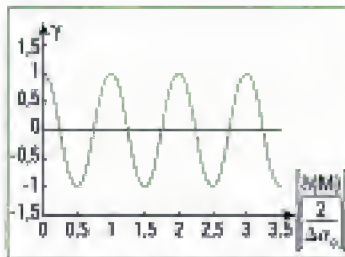


Fig. 18 – Variation du degré de cohérence en fonction de la différence de marche $\delta(M)$.

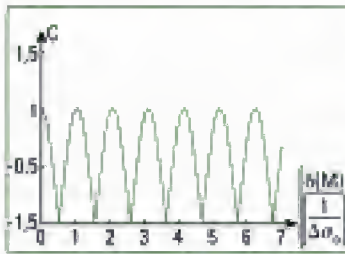


Fig. 19 – Évolution du contraste en fonction de la différence de marche $\delta(M)$. La période du phénomène est $\frac{1}{\Delta \sigma_0}$.

2. Cette situation, dans laquelle un phénomène de « basse fréquence » régit l'amplitude d'un phénomène « haute fréquence », est typiquement un phénomène de modulation, comme en électronique par exemple. Nous pouvons alors utiliser les termes modulant et modulé.

Le rapport des fréquences du signal modulant et du modulé n'a pas été respecté pour une meilleure lisibilité des courbes.

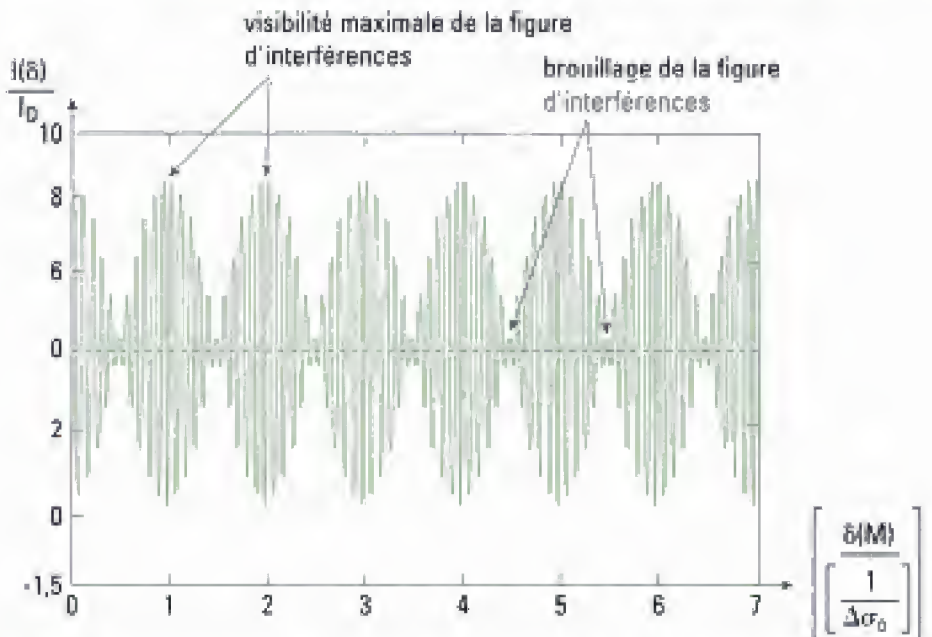
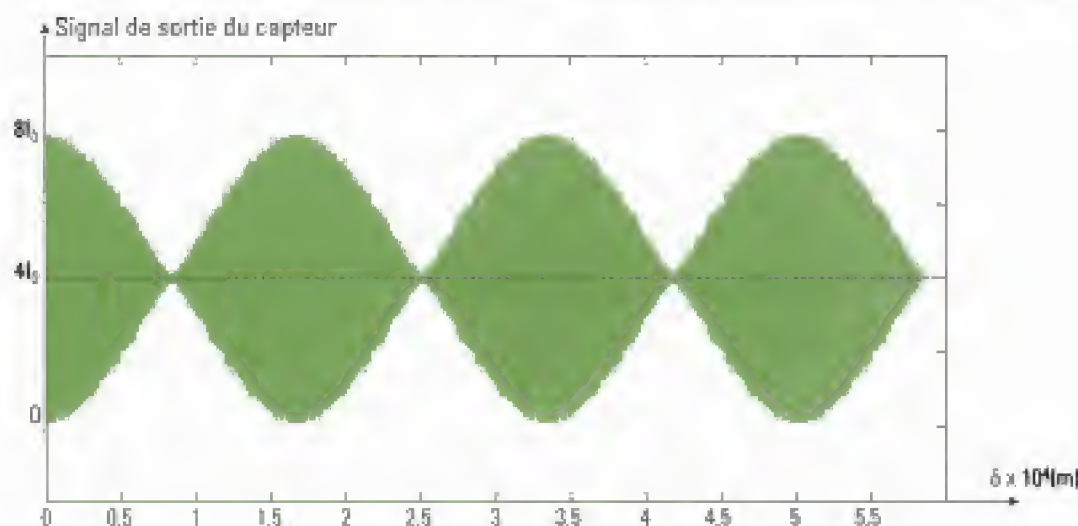


Fig. 20 – Évolution de l'intensité lumineuse en fonction de la différence de marche $\delta(M)$.

La période du phénomène de modulation² est $\frac{1}{\Delta \sigma_1}$. L'écart du doublet spectral du sodium sera mesuré à l'aide de ce genre d'enregistrement au chapitre 5 paragraphe B.6.

Application 2 Interférogramme pour le doublet jaune du mercure

La source ponctuelle S est celle correspondant au doublet jaune du mercure ($\lambda_{0_1} = 577 \text{ nm}$; $\lambda_{0_2} = 579 \text{ nm}$). Nous translatons le miroir (M_2) de l'interféromètre de Michelson en l'écartant du contact optique (X croit). Nous enregistrons et traçons l'image de l'intensité lumineuse $I(M) = I(X)$ donnée par le signal de sortie du capteur placé au point M comme au paragraphe D1.



En déduire l'écart entre les longueurs d'onde du doublet.

Solution

La différence de marche en un point de l'écran est $\delta(M) = 2e = 2X$ et

$$I(M) = 4I_0 [1 + \cos [\pi \Delta\sigma_0 \delta(M)] \cos [2\pi\sigma_{om} \delta(M)]].$$

$\frac{1}{\Delta\sigma_0}$ est la période du signal enregistré. Nous remarquons sur l'enregistrement que dans $5 \times 10^{-4} \text{ m}$,

il y a trois périodes du signal modulant d'où : $\frac{1}{\Delta\sigma_0} = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{3}$.

Or $\sigma_0 = \frac{1}{\lambda_0}$ donc $d\sigma_0 = -\frac{d\lambda_0}{\lambda_0^2}$ soit pour des petites variations : $\Delta\sigma_0 = \frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_0^2}$ et $\Delta\lambda_0 = \lambda_0^2 \Delta\sigma_0$.

Les deux radiations étant proches, nous pouvons prendre la valeur moyenne λ_{om} pour valeur de λ_0 sans commettre une grande erreur. Alors, $\Delta\lambda_0 = \lambda_{om}^2 \Delta\sigma_0 = (578 \cdot 10^{-9})^2 \frac{3}{5 \cdot 10^{-4}} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ m}$.

Nous avons donc : $\Delta\lambda_0 = 2 \text{ nm}$, ce qui est conforme à ce que nous savons de ce doublet.

Le premier brouillage se produit pour :

$$\cos [\pi \Delta\sigma_0 \delta(M)] = 0, \text{ soit : } \delta(M) = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{\Delta\sigma_0}, m \in \mathbb{Z}.$$

Or, pour l'interféromètre de Young :

$$\delta(M) = \frac{ax}{D} \text{ et } i \approx \frac{\lambda_{om} D}{a}, \text{ soit : } \frac{x}{i} = \frac{\delta(M)}{\lambda_{om}} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{\lambda_{om} \Delta\sigma_0}.$$

Pour observer le brouillage, il faut donc compter :

$$\frac{x}{i} = \frac{1}{2 \times 578 \cdot 10^{-9}} \times \frac{5 \cdot 10^{-4}}{3} = 144 \text{ franges}$$

Ceci est impossible l'interféromètre de Young (quelques dizaines de franges réellement observables) et montre l'intérêt de l'interféromètre de Michelson qui permet d'obtenir de grandes différences de marche $\delta(M)$.

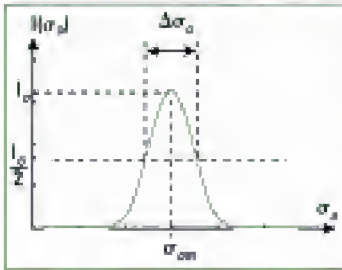


Fig. 21 – Densité spectrale d'intensité (ou intensité spectrale) pour une raie d'émission.

1. Comme au paragraphe D.2, nous donnons cette description non pas en fonction de la fréquence mais en fonction du nombre d'onde σ_0 , ce qui est quasiment équivalent puisque

$$\sigma_0 = \frac{1}{\lambda_0} = \frac{\nu_0}{c}.$$

D.3. Cas d'une source de profil spectral rectangulaire et de faible largeur spectrale

• Intérêt physique

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, une raie d'émission n'est pas rigoureusement monochromatique en raison de la durée de transition, de l'agitation des atomes émetteurs, des chocs que subissent ces atomes. Un profil classique de raie spectrale est celui de la [figure 21](#) où l'on représente la densité spectrale d'intensité, aussi nommée intensité spectrale, en fonction de σ_0 ¹. σ_{0m} est le nombre d'onde moyen et $\Delta\sigma_0$ la largeur de la raie à mi-hauteur. Ce type de courbe montre comment l'intensité lumineuse est répartie dans le domaine spectral, ou fréquentiel.

Dans un intervalle spectral élémentaire $d\sigma_0$, l'intensité élémentaire émise par la source est $dI(\sigma_0)$. Chacune de ces bandes spectrales élémentaires constitue une source cohérente; par contre, deux bandes différentes sont incohérentes, leur nombre d'onde, et donc leur fréquence étant différents.

• Modélisation d'une raie spectrale

Modélisons la raie spectrale précédente par la répartition spectrale suivante appelée raie à profil spectral rectangulaire:

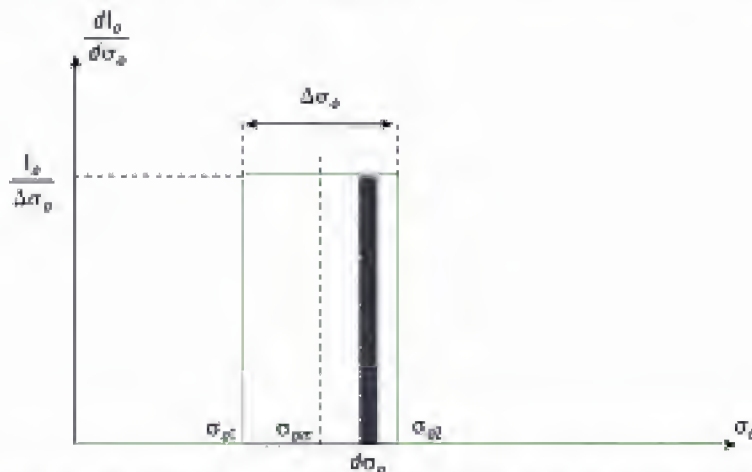


Fig. 22 – Modélisation d'une raie spectrale par un profil rectangulaire.

Cette modélisation n'est pas des plus réalistes mais avec une économie de calcul, elle donne des résultats satisfaisants.

Généralement, nous avons $\Delta\sigma_0 \ll \sigma_{0m}$; cette modélisation est donc celle d'une raie de faible largeur spectrale, à profil rectangulaire.

• Expression de l'intensité lumineuse

Nous plaçons cette source ponctuelle émettant ce profil de raie à l'entrée de l'interféromètre de Michelson (géométrie et montage indiqués au paragraphe D.1), et nous cherchons les conséquences de cette nouvelle situation sur les interférences produites. Comme indiqué précédemment, nous raisonnons de manière générale en utilisant la différence de marche $\delta(M)$, sans que celle-ci soit liée *a priori* à un interféromètre particulier. I_0 est l'intensité totale véhiculée par chaque bras de l'interféromètre.

Chaque bande de largeur $d\sigma_0$ ([figure 22](#)) située entre σ_0 et $\sigma_0 + d\sigma_0$ ², qui constitue une source indépendante de ses voisines, donne lieu à une division d'onde dans les deux bras où se crée la différence de marche $\delta(M)$.

2. Avec $\sigma_0 = \frac{1}{\lambda_0}$.

L'intensité véhiculée dans chaque bras, indépendamment de l'autre, est :

$$dI_0 = \frac{I_0}{\Delta\sigma_0} d\sigma_0.$$

Au point M, ces deux ondes se superposent et interfèrent. L'intensité lumineuse élémentaire en ce point s'écrit aussi :

$$dI = 2dI_0 \left[1 + \cos \left(2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda_0} \right) \right].$$

Les différentes bandes étant incohérentes entre elles, il faut que nous ajoutions les intensités lumineuses élémentaires pour obtenir l'intensité lumineuse totale au point M.

$$I(M) = \int_{-\infty}^{+\infty} dI = \int_{-\infty}^{+\infty} 2dI_0 \left[1 + \cos \left(2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda_0} \right) \right]$$

$$= 2 \frac{I_0}{\Delta\sigma_0} \int_{\sigma_0}^{\sigma_0} [1 + \cos(2\pi\sigma_0\delta(M))] d\sigma_0$$

$$I(M) = 2 \frac{I_0}{\Delta\sigma_0} \int_{\sigma_{om} - \frac{\Delta\sigma_0}{2}}^{\sigma_{om} + \frac{\Delta\sigma_0}{2}} [1 + \cos(2\pi\sigma_0\delta(M))] d\sigma_0$$

$$= 2 \frac{I_0}{\Delta\sigma_0} \left[\sigma_0 + \frac{\sin(2\pi\sigma_0\delta(M))}{2\pi\delta(M)} \right]_{\sigma_{om} - \frac{\Delta\sigma_0}{2}}^{\sigma_{om} + \frac{\Delta\sigma_0}{2}}$$

$$I(M) = 2 \frac{I_0}{\Delta\sigma_0} \left[\Delta\sigma_0 + \frac{\sin \left[2\pi\delta(M) \left(\sigma_{om} + \frac{\Delta\sigma_0}{2} \right) \right] - \sin \left[2\pi\delta(M) \left(\sigma_{om} - \frac{\Delta\sigma_0}{2} \right) \right]}{2\pi\delta(M)} \right]$$

et en factorisant la différence des deux sinus :

$$I(M) = 2 \frac{I_0}{\Delta\sigma_0} \left[\Delta\sigma_0 + \frac{2 \sin [\pi\Delta\sigma_0\delta(M)] \cos [2\pi\sigma_{om}\delta(M)]}{2\pi\delta(M)} \right]$$

et enfin :

$$I(M) = 2I_0 \left[1 + \frac{\sin [\pi\Delta\sigma_0\delta(M)]}{\pi\Delta\sigma_0\delta(M)} \cos [2\pi\sigma_{om}\delta(M)] \right].$$

Que l'on peut mettre sous la forme :

$$I(M) = 2I_0 [1 + \gamma(M) \cos [2\pi\sigma_{om}\delta(M)]]$$

$$= 2I_0 \left[1 + \gamma(M) \cos \left[2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda_{om}} \right] \right]$$

avec $\lambda_{om} = \frac{1}{\sigma_{om}}$. On obtient ainsi $\gamma(M)$, le degré de cohérence temporelle de la source :

$$\gamma(M) = \frac{\sin [\pi\Delta\sigma_0\delta(M)]}{\pi\Delta\sigma_0\delta(M)} = \text{sinc} [\pi\Delta\sigma_0\delta(M)].$$

où $\text{sinc}(u)$ est la fonction sinus cardinal dont le tracé a été donné au chapitre 3 paragraphe C. Ainsi,

$$I(M) = 2I_0 \left[1 + \text{sinc} [\pi\Delta\sigma_0\delta(M)] \cos \left[2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda_{om}} \right] \right].$$

1. Ceci rappelle aussi le calcul fait pour le degré de cohérence spatiale :

$$\gamma(s) = \frac{\sin\left(\frac{\pi s}{\lambda d}\right)}{\frac{\pi s}{\lambda d}}$$

(chapitre 3 paragraphe C.) et l'écriture de l'intensité lumineuse correspondante :

$$I(M) = 2I_0 \left[1 + \gamma(s) \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda D}\right) \right]$$

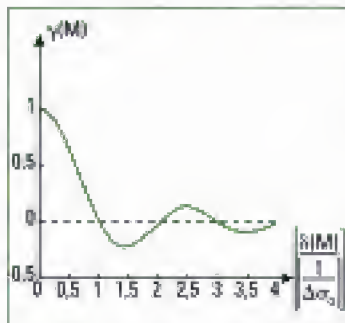


Fig. 23 – Variation du degré de cohérence temporelle en fonction de la différence de marche δ pour une raie de faible largeur spectrale à profil rectangulaire. La loi de variation est en sinus cardinal.

2. Là aussi, le rapport des fréquences du signal modulant et du modulé n'a pas été respecté pour une meilleure lisibilité des courbes.

• Analyse de l'expression donnant l'intensité

Nous reconnaissons le terme interférentiel $\cos\left[2\pi\frac{\delta(M)}{\lambda_{\text{ave}}}\right]$ habituel, multiplié par le degré de cohérence temporelle $\gamma(M) = \frac{\sin[\pi\Delta\sigma_0\delta(M)]}{\pi\Delta\sigma_0\delta(M)}$ (figure 23).

Or, la « période » de la fonction $\cos[2\pi\sigma_{\text{ave}}\delta(M)]$ est $\frac{1}{\sigma_{\text{ave}}} = \lambda_{\text{ave}}$ et la fonction sinus cardinal s'annule lorsque $\pi\Delta\sigma_0\delta(M) = m\pi$ ($m \in \mathbb{N}^*$) donc pour $\delta(M) = \frac{m}{\Delta\sigma_0}$.

Comme par hypothèse $\Delta\sigma_0 \ll \sigma_{\text{ave}}$, la « période » d'évolution de $\gamma(M)$ est très supérieure à celle du facteur d'interférence $\cos[2\pi\sigma_{\text{ave}}\delta(M)]$. Au voisinage du point M considéré, nous pouvons donc considérer que $\gamma(M)$ est une constante, ou que du moins il varie très peu.

Dans ce cas, au voisinage du point M nous avons :

$$I_{\text{max}} = 2I_0(1 + |\gamma(M)|) \text{ et } I_{\text{min}} = 2I_0(1 - |\gamma(M)|),$$

ce qui conduit à un facteur de contraste :

$$C = |\gamma(M)| = |\text{sinc}[\pi\Delta\sigma_0\delta(M)]|$$

Nous obtenons alors les tracés suivants (figures 24 et 25) :

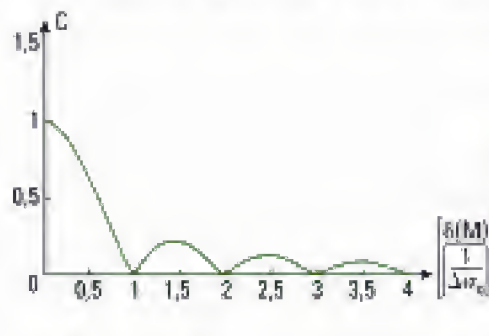


Fig. 24 – Évolution du contraste en fonction de la différence de marche δ .

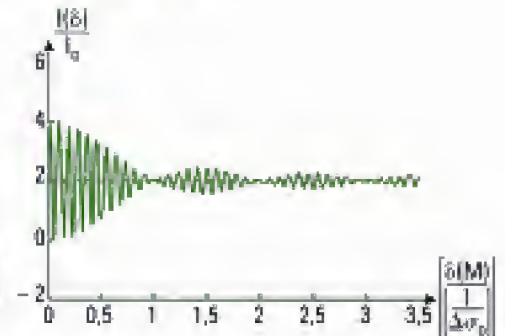


Fig. 25 – Évolution de l'intensité lumineuse en fonction de la différence de marche δ .²

• Largeur spectrale et disparition de la figure d'interférences

Nous remarquons que la figure d'interférences disparaît si $\delta(M) = \frac{1}{\Delta\sigma_0}$ puisque le facteur de contraste est alors nul (figures 24 et 25). Lorsque le contraste passe la première fois par la valeur nulle, les franges disparaissent. Ceci correspond à une situation dans laquelle la différence de marche est égale à la longueur de cohérence temporelle :

$$\delta(M) = \frac{1}{\Delta\sigma_0} = L_c.$$

Un examen rapide des courbes montre qu'au-delà de cette valeur de $\delta(M)$ le phénomène d'interférences réapparaît avec un contraste inversé (figure 23). En pratique, on n'observe jamais ce phénomène car, en termes de trains d'onde, si la longueur de cohérence temporelle est dépassée, il n'y a pas de raison qu'elle s'améliore si on augmente encore $\delta(M)$. Cette divergence entre les précédents résultats théoriques et l'observation expérimentale s'explique par le caractère simpliste du profil spectral rectangulaire.

Par ailleurs, la disparition des franges a lieu pour un ordre $p = \frac{\delta(M)}{\lambda_0} = \frac{\sigma_0}{\Delta\sigma_0}$ élevé. Évaluons cet ordre dans le cas de la raie verte du mercure de longueur d'onde $\lambda_0 = 546,1 \text{ nm}$, pour laquelle $\Delta\lambda_0 \approx 1 \text{ nm}$ (lampe haute pression).

Comme $\Delta\sigma_0 = \frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_0^2} = \Delta\lambda_0 \sigma_0^2$, nous obtenons :

$$p = \frac{\sigma_0}{\Delta\sigma_0} = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda_0} = \frac{546,1 \cdot 10^{-9}}{1 \cdot 10^{-9}} = 546.$$

Cet ordre est élevé. Ainsi, les interféromètres classiques comme ceux de Young et de Fresnel, ne permettront pas d'observer la disparition du phénomène d'interférences sous l'influence de la cohérence temporelle. Par contre, l'interféromètre de Michelson, pour lequel la différence de marche due aux deux bras peut être importante, et donc l'ordre p aussi, permet ce genre d'observation.

• Longueur de cohérence temporelle et disparition de la figure d'interférences

Dans le cas de l'interféromètre de Michelson réglé en lame d'air à faces parallèles comme au paragraphe D.1, où $\delta(M) = 2X$, le premier brouillage a lieu

si $\delta(M) = \frac{1}{\Delta\sigma_0} = 2X$, soit pour :

$$X = \frac{1}{2\Delta\sigma_0} = \frac{\lambda_0^2}{2\Delta\lambda_0} = \frac{(546,1 \cdot 10^{-9})^2}{2 \times 1 \cdot 10^{-9}} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,15 \text{ mm}.$$

1. Comparer ce résultat avec les valeurs numériques plus élevées obtenues dans l'exercice 9. La nature de la lampe spectrale (haute ou basse pression) explique ces différences.

2. Dans le cas de la raie verte du mercure, nous trouvons ainsi :

$$L_c = \frac{1}{\Delta\sigma_0} = 2X = 0,3 \text{ mm}.$$

C'est bien cette valeur que nous avons indiquée au tableau de la figure 13 du chapitre 1.

3. La raie n'a pas une faible largeur spectrale. Nous n'obtenons donc qu'une estimation.

D'une part, nous voyons qu'il faut déplacer le miroir mobile (M_2) de très petites quantités ; ceci sera réalisé grâce à une vis micrométrique.

D'autre part, nous obtenons ici une méthode de détermination de la largeur spectrale d'une source ; il suffit de chercher la position du miroir mobile qui donne le brouillage de la figure d'interférences.

Enfin, nous savons que la notion de largeur spectrale est intimement liée à celle de longueur de cohérence temporelle (voir chapitre 1 et le modèle des trains d'ondes). La mesure de la largeur spectrale permet donc d'estimer l'ordre de grandeur de la longueur de cohérence temporelle L_c des sources².

E. Interférences avec une source de lumière blanche

Une première approche qualitative de cette question a été abordée au paragraphe C. du chapitre 3.

Modélisons la lumière blanche comme une source de largeur spectrale $\Delta\lambda_0 = 400 \text{ nm}$ centrée sur la longueur d'onde moyenne $\lambda_{\text{ave}} = 600 \text{ nm}$. Nous obtenons une estimation³ de la différence de marche maximale qui produit

le brouillage $\delta_{\text{max}} = \frac{1}{\Delta\sigma_0} = \frac{\lambda_{\text{ave}}^2}{\Delta\lambda_0} \approx 1 \text{ }\mu\text{m}$, ce qui correspond à un ordre d'in-

terférence maximal $p_{\text{max}} = \frac{\delta_{\text{max}}}{\lambda} \approx 2$.

Cette valeur très faible de p montre qu'en lumière blanche le phénomène d'interférences sera très limité dans le champ d'interférences. Un ordre de grandeur peu être donné dans le cas des franges rectilignes.

1. Avec les valeurs utilisées dans ce chapitre : $a = 1 \text{ mm}$; $D = 1 \text{ m}$. Cette modélisation ne donne qu'un ordre de grandeur. Dans la pratique, $a < 1 \text{ mm}$ et la largeur de la figure d'interférences est de l'ordre du centimètre.

2. Car dans ce cas $\delta = 0$ pour $x_0 = 0$. Ce cas n'est pas systématique ainsi que le montre le miroir de Lloyd.

3. Voir tableau en figure 13 du chapitre 1.

Avec $\delta_{\max} = \frac{ax_{l,\max}}{D}$, nous obtenons $x_{l,\max} = \frac{\delta_{\max} D}{a} = 1 \text{ mm}$.

Au-delà de cette limite, l'éclairement est uniforme.

Comme indiqué à la figure 28 du chapitre 3, au centre de la figure d'interférences, toutes les radiations composant la lumière blanche sont en phase, et la frange centrale est blanche². Chaque radiation crée son propre système de franges qui n'ont pas le même interfrange, ce qui donne des franges colorées. Au-delà d'un ordre p de quelques unités, le phénomène se brouille, l'éclairement devient uniforme : l'écran est blanc. Cependant, la condition de cohérence temporelle pour les radiations qui composent la lumière blanche³ est moins sévère que pour la lumière blanche ($1 \mu\text{m}$). Aussi, chaque radiation crée sa figure d'interférences, non détectable à l'œil, avec ses maximums et ses minimums et se superpose aux autres. Le blanc qui en résulte n'est pas de même nature que le blanc de la frange centrale car en ces points M de l'écran uniformément éclairé se trouvent une ou des radiations éteintes que l'on peut détecter en utilisant un spectroscope (figure 26) montrant les radiations éteintes appelées cannelures (figure 27).

Cet éclairement uniforme qui contient des cannelures non visibles à l'œil est nommé « blanc d'ordre supérieur ».

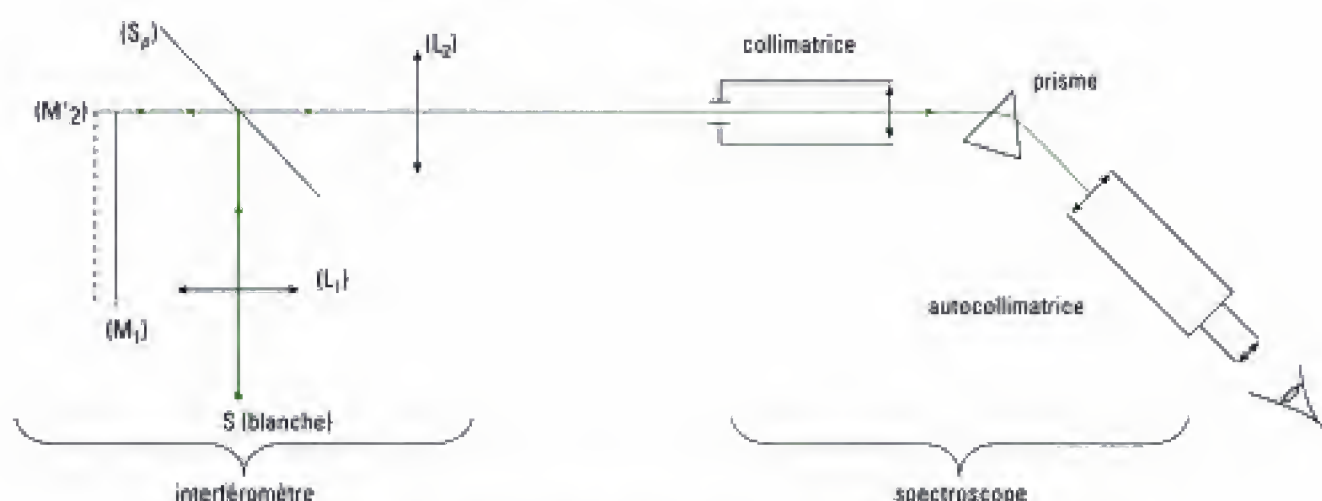


Fig. 26 – Montage permettant d'observer les cannelures dans le blanc d'ordre supérieur.

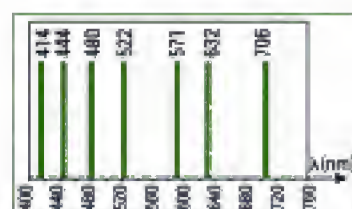


Fig. 27 – Cannelures observées et longueurs d'ondes associées dans le blanc d'ordre supérieur pour des franges rectilignes, le spectroscope pointant une zone éloignée de 6 mm de la frange centrale : comme précédemment, $a = 1 \text{ mm}$; $D = 1 \text{ m}$.

L'essentiel

✓ Interféromètre de Michelson

• L'appareil

Un interféromètre de Michelson comprend deux miroirs (M_1) et (M_2) sensiblement à angle droit l'un de l'autre, (M_2) supposé mobile faisant face à l'entrée de l'appareil. (M_1) est considéré comme fixe. Une lame semi réfléchissante (S_p) nommée séparatrice, qui fait un angle d'environ

$$\frac{\pi}{4}$$

avec les miroirs, divise le faisceau incident en deux faisceaux qui parcourent des chemins différents nommés bras (1 et 2) de l'interféromètre.

Deux paramètres caractérisent la position des miroirs :

- la distance $e = \Omega\Omega_2 - \Omega\Omega_1$, qui sépare les deux miroirs ;
- l'angle α repéré par rapport à l'orthogonalité des deux miroirs.

• Interféromètre de Michelson éclairé par une source ponctuelle

Cette utilisation donne naissance à des interférences non localisées.

La construction géométrique du parcours d'un rayon dans chaque bras de l'interféromètre en utilisant les symétries liées à la nature catoptrique du dispositif montre que le rayon émergent de l'interféromètre est issu d'une source secondaire virtuelle image de la source S . La position de cette source s'obtient par la composition de deux symétries :

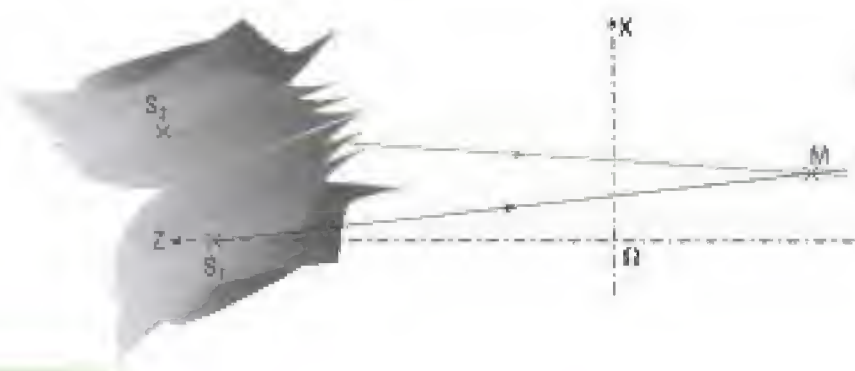
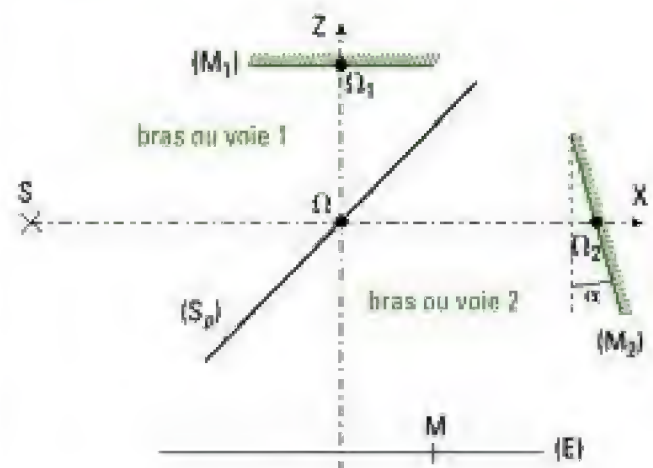
$$\bullet \text{ pour la source } S_1 : S \xrightarrow{(S_p)} S' \xrightarrow{(M_1)} S_1.$$

$$\bullet \text{ pour la source } S_2 : S \xrightarrow{(M_2)} S'' \xrightarrow{(S_p)} S_2.$$

De plus, les chemins optiques $(SM)_{\text{bras } 1}$ et (S_1M) sont égaux.

De même, les chemins optiques $(SM)_{\text{bras } 2}$ et (S_2M) sont égaux.

L'interféromètre de Michelson éclairé par une source ponctuelle est donc équivalent à un système interférentiel à deux sources cohérentes S_1 et S_2 .



Les interférences existent partout où les deux faisceaux issus de S_1 et S_2 se recouvrent : le phénomène d'interférences est non localisé.

L'interféromètre de Michelson, utilisé avec une source ponctuelle est donc un diviseur de front d'onde.

• Figures d'interférences

Les figures d'interférences observées sont celles déjà obtenues avec les interféromètres à division de front d'onde. Si l'écran où l'on observe les figures d'interférences est :

- parallèle à la droite qui passe par les sources, les franges d'interférences observées sur l'écran ont la forme de portions d'hyperboles ;
- perpendiculaire à la droite qui passe par les sources, les franges d'interférences observées sur l'écran ont la forme d'anneaux.

Cependant, dans le cas de l'interféromètre de Michelson, l'observation de ces figures demande que l'on amène les figures d'interférences dans le champ réellement observable, par réglage de la position relative des miroirs de l'interféromètre.

• Géométries de l'interféromètre de Michelson

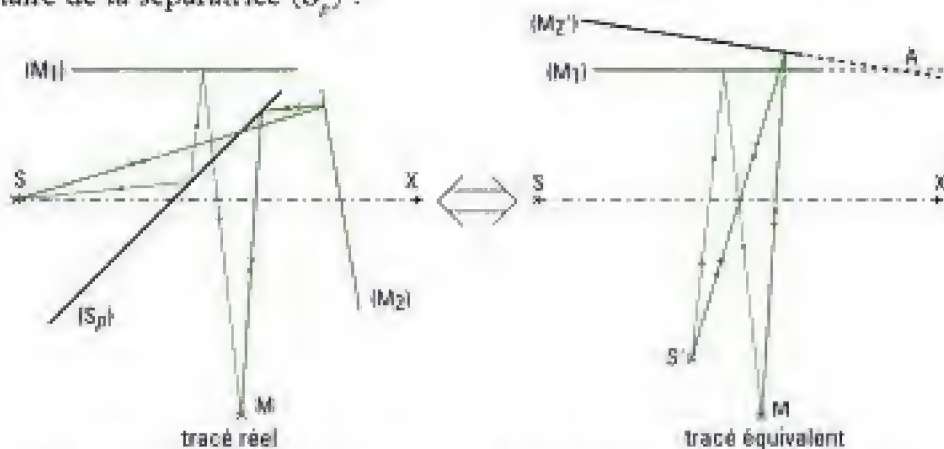
En conséquence, il existe deux géométries ou montages particuliers pour l'interféromètre de Michelson :

- l'angle α et la distance e sont faibles : il s'agit du montage dit « en coin d'air » ;
- l'angle α est nul et la distance e est faible : il s'agit du montage dit « en lame d'air à faces parallèles ».

✓ Utilisation de l'interféromètre de Michelson éclairé avec une source ponctuelle

• Montage en coin d'air

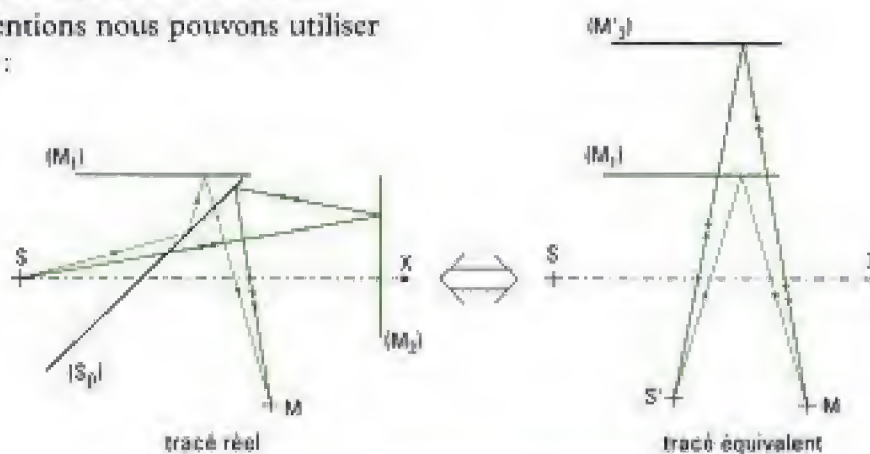
Nous pouvons utiliser l'équivalence suivante où (M'_2) et (S') sont les images de (M_2) et (S) par l'intermédiaire de la séparatrice (S_p) :



Les franges d'interférences observées sur un écran placé en M parallèlement à la droite portant les sources sont rectilignes.

• Montage en lame d'air à faces parallèles

Avec les mêmes conventions nous pouvons utiliser l'équivalence suivante :



Les franges d'interférences observées sur un écran placé en M perpendiculairement à la droite portant les sources sont des anneaux.

✓ **Interférences de deux ondes en lumière non monochromatique : cohérence temporelle**

Pour deux radiations de longueur d'onde voisine λ_{0_1} et λ_{0_2} , en utilisant le nombre d'onde

$\sigma_0 = \frac{1}{\lambda_0}$ et en posant $\Delta\sigma_0 = \sigma_{0_1} - \sigma_{0_2}$, $\sigma_{\text{cm}} = \frac{\sigma_{0_1} + \sigma_{0_2}}{2}$, l'intensité lumineuse s'écrit :

$$I(M) = 4I_0 \left[1 + \gamma(M) \cos \left[2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda_{\text{cm}}} \right] \right]$$

avec $\gamma(M) = \cos [\pi \Delta\sigma_0 \delta(M)]$ et $\lambda_{\text{cm}} = \frac{1}{\sigma_{\text{cm}}}$.

$\gamma(M)$ est appelé le *degré de cohérence temporelle*.

✓ **Cas d'une source de profil spectral rectangulaire et de faible largeur spectrale**

Avec les mêmes notations que précédemment, l'intensité lumineuse s'écrit :

$$I(M) = 2I_0 \left[1 + \gamma(M) \cos \left[2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda_{\text{cm}}} \right] \right]$$

avec $\gamma(M) = \frac{\sin [\pi \Delta\sigma_0 \delta(M)]}{\pi \Delta\sigma_0 \delta(M)} = \text{sinc} [\pi \Delta\sigma_0 \delta(M)]$ et $\lambda_{\text{cm}} = \frac{1}{\sigma_{\text{cm}}}$.

✓ **Interférences avec une source de lumière blanche**

En lumière blanche, le champ d'interférences est limité par la cohérence temporelle de la source. On observe des franges colorées qui, assez vite, cèdent la place à un blanc dit « *d'ordre supérieur* ». Dans ce blanc d'ordre supérieur, en un point de l'écran, certaines radiations qui interfèrent en ce point sont absentes : le spectre en ce point est alors *cannelé*.

Mise en œuvre

Méthode n°1

Comment étudier les interférences d'une source polychromatique ?

On souhaite dégager une méthode d'étude des interférences lorsqu'un interféromètre est éclairé par une source polychromatique S qui soit comporte deux radiations (doublet), soit possède une densité spectrale lumineuse continue. Le cas particulier d'une source de lumière blanche est abordé en méthode 2. On suppose la cohérence spatiale réalisée.

→ Savoir faire

❶ Identifier le profil spectral de la source S .

- Lorsque son spectre est constitué de deux raies monochromatiques très proches dans le domaine spectral, la source S se comporte comme deux sources monochromatiques, géométriquement confondues, incohérentes entre elles.

- Lorsque la répartition spectrale $I(\nu_0)$ est continue dans le domaine spectral, il faut commencer par décomposer la source S en sources élémentaires monochromatiques, géométriquement confondues, émettant sur un intervalle de largeur spectrale élémentaire ($d\nu_0$ avec la variable fréquence ν_0 , $d\lambda_0$ avec la variable longueur d'onde λ_0 ou $d\sigma_0$ avec la variable nombre d'onde σ_0).

- ② • Dans le cas du doublet, déterminer l'intensité produite par l'interféromètre éclairé par une des raies. Cette étape nécessite donc de déterminer au préalable la différence de marche $\delta(M)$ en un point M du champ d'interférences.

- Dans le cas d'une source à répartition spectrale continue, déterminer l'intensité élémentaire $dI(M)$ produite par l'interféromètre éclairé par la source de largeur spectrale élémentaire $d\nu_0$. Cette étape nécessite aussi de déterminer au préalable la différence de marche $\delta(M)$ en un point M du champ d'interférences et conduit à :

$$dI(M) = 2I(\nu_0) \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi\nu_0}{c} \delta(M) \right) \right] d\nu_0$$

(on peut aussi introduire les variables λ_0 ou σ_0 selon l'énoncé posé).

- ③ • Si on demande l'expression de l'intensité totale $I(M)$ au point M , additionner, dans le cas du doublet, les intensités lumineuses des deux radiations du spectre de la source S car ces deux radiations sont incohérentes entre elles.

- Dans le cas d'un spectre continu, cela revient à calculer une intégrale dont les bornes sont choisies en fonction du profil spectral de la source et des indications de l'énoncé.

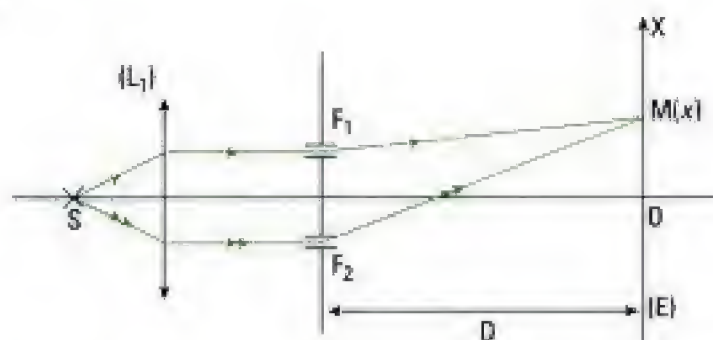
- ④ • Si l'exercice posé demande d'étudier le brouillage des franges, dans le cas d'un doublet, il faut distinguer deux sous-cas :

- si le dispositif est un diviseur de front d'ondes : la différence des chemins optiques réalisable est faible et le premier brouillage n'est alors pas observable en pratique ! On peut le montrer en indiquant que ce brouillage se produit lorsque les franges sombres d'une raie spectrale se superposent aux franges brillantes de l'autre raie. À noter qu'il n'est pas nécessaire en ce cas de connaître l'expression de $I(M)$;

- si le dispositif peut donner lieu à des différences de marche importante, comme par exemple avec l'interféromètre de Michelson, il est possible d'observer en pratique plusieurs brouillages successifs que l'on met en évidence en recherchant les zéros du degré de cohérence temporel $\gamma(M)$ en fonction de $\delta(M)$ comme cela a été vu en cours.

- Dans le cas d'une source à répartition spectrale continue, il faut rechercher les points du champ d'interférences pour lesquels le degré de cohérence temporel $\gamma(M)$ s'annule.

→ Application



Le dispositif des fentes de Young supposées très fines, distantes de $a = 4 \text{ mm}$, est éclairé par une source ponctuelle, équidistante des deux fentes.

Cette source est le doublet de lumière jaune du sodium dont le spectre est constitué des deux radiations suivantes $\lambda_{0_1} = 0,5890 \text{ }\mu\text{m}$ et $\lambda_{0_2} = 0,5896 \text{ }\mu\text{m}$ qui ont même intensité. On observe les franges d'interférences sur un écran (E) placé à la distance $D = 1,5 \text{ m}$ du plan des fentes et parallèlement à celui-ci.

Déterminer à quelle distance de la frange centrale les franges disparaissent.

Solution

- ① On étudie dans cette application un doublet qui comporte deux raies de longueurs d'onde respectives λ_{0_1} et λ_{0_2} .
- ② Chaque raie produit un système de franges dont l'intensité lumineuse en un point M du champ d'interférences s'écrit :

$$I_1(M) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_{0_1}} \delta(M) \right) \right] \text{ et } I_2(M) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_{0_2}} \delta(M) \right) \right].$$

L'expression de la différence de marche a été établie au chapitre précédent et nous la rappelons ici sans démonstration :

$$\delta(M) = \frac{ax}{D}$$

pour un point M d'abscisse x sur l'axe vertical, perpendiculaire à l'axe optique du dispositif et situé dans le plan de l'écran (E).

- ③ L'énoncé ne demande pas explicitement d'exprimer l'intensité totale au point M, ce qui n'est pas nécessaire pour étudier le brouillage des franges puisque l'on étudie ici un diviseur de front d'ondes éclairé par un doublet.

On peut donc se contenter de rechercher la condition pour laquelle les franges sombres d'une radiation du doublet se superposent aux franges brillantes de l'autre radiation.

Déterminons par exemple la position x_1 des franges sombres associées à la radiation de longueur d'onde λ_{0_1} :

$$\delta(M) = (2m + 1) \frac{\lambda_{0_1}}{2} \text{ avec } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_1 = (2m + 1) \frac{\lambda_{0_1} D}{2a}.$$

De même, la position x_2 des franges brillantes associées à la radiation de longueur d'onde λ_{0_2} est telle que :

$$\delta(M) = m \lambda_{0_2} \text{ avec } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_2 = m \frac{\lambda_{0_2} D}{a}.$$

Le brouillage ayant lieu lorsque les franges brillantes associées à l'une des raies sont superposées aux franges sombres de l'autre raie, on résout :

$$m \frac{\lambda_{0_2} D}{a} = (2m + 1) \frac{\lambda_{0_1} D}{2a} \Rightarrow m = \frac{\lambda_{0_1}}{2(\lambda_{0_2} - \lambda_{0_1})} = 491.$$

D'où on déduit la distance cherchée :

$$x_1 = x_2 = 109 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 10,9 \text{ cm}.$$

Cette valeur est élevée et n'est pas en accord avec l'hypothèse de calcul $x \ll D$ qui permet d'obtenir l'expression rappelée de $\delta(M)$.

Ainsi, on peut conclure que dans ce cas le brouillage ne sera pas observé sur l'étendue réelle du champ d'interférences dans le plan de l'écran (E). Ceci est dû à la nature de l'interféromètre qui est ici un diviseur de front d'ondes.

Comment étudier les interférences d'une source de lumière blanche ?

On souhaite dégager une méthode d'étude des interférences lorsqu'un interféromètre est éclairé par une source de lumière blanche dont le spectre s'étend approximativement de $0,4 \mu\text{m}$ à $0,8 \mu\text{m}$.

→ Savoir faire

❶ Identifier la nature du dispositif interférentiel étudié.

- 1^{er} cas : le dispositif est non dispersif. Ceci signifie que les chemins optiques sont indépendants de la longueur d'onde considérée. Par exemple, l'air est considéré comme non dispersif, son indice étant très proche de 1 pour toute longueur d'onde.
- 2^e cas : le dispositif est dispersif. C'est par exemple le cas lorsque l'un des deux bras de l'interféromètre contient une lame de verre dont l'indice dépend de la longueur d'onde.

❷ Prévoir les propriétés caractéristiques du spectre observé sur un écran en distinguant les deux cas possibles.

- 1^{er} cas : le dispositif est non dispersif. La frange centrale est blanche (ou noire comme dans le cas du dispositif de Lloyd) et irisée. Dès que l'on s'écarte suffisamment du centre, les différentes radiations du visible se superposent et donnent le blanc d'ordre supérieur.
- 2^e cas : le dispositif est dispersif. La frange centrale n'est plus définie mais il existe une frange non colorée dite achromatique. Dès que l'on s'écarte de celle-ci, les systèmes de franges associés à chaque radiation se superposent, ce qui conduit à un brouillage progressif des franges donc à un éclaircissement uniforme de l'écran.

❸ Déterminer les grandeurs caractéristiques du problème posé.

- 1^{er} cas : le dispositif est non dispersif. On détermine les radiations éteintes de longueurs d'onde λ_0 comprises entre $0,4 \mu\text{m}$ à $0,8 \mu\text{m}$ en un point M du champ d'interférences. Pour ce faire, on commence par exprimer la différence de marche $\delta(M)$ en ce point. Ensuite, on recherche les valeurs entières de m telles que :

$$\delta(M) = (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2} \text{ (soit } \Delta\varphi(M) = (2m + 1)\pi \text{) et } 0,4 \mu\text{m} \leq \lambda_0 \leq 0,8 \mu\text{m}.$$

Ceci permet de déterminer les longueurs d'onde des radiations éteintes (cannelures) au point M du champ d'interférences.

- 2^e cas : le dispositif est dispersif. On peut déterminer par exemple la position de la frange achromatique sur l'écran pour laquelle l'ordre d'interférence varie peu avec λ_0 . On résout alors :

$$\frac{d\rho}{d\lambda_0} = \frac{d}{d\lambda_0} \left(\frac{\delta(\lambda_0)}{\lambda_0} \right) = 0$$

pour une longueur d'onde située au milieu du spectre visible (voir exercice 7).

→ Application

On considère le dispositif du miroir de Lloyd étudié dans l'exercice 7 du chapitre 2 qui a conduit au résultat suivant :

$$\delta(M) = \frac{2xh}{d + \ell} + \frac{\lambda_0}{2}$$

où x désigne la position du point M sur l'écran (E), λ_0 désigne la longueur d'onde de la source, d et h repèrent la position de la source par rapport au miroir de largeur ℓ .

On rappelle que $d = 20 \text{ cm}$, $\ell = 25 \text{ cm}$, $h = 1,89 \text{ mm}$. On suppose que la source émet de la lumière blanche dont le spectre s'étend de $0,4 \mu\text{m}$ à $0,8 \mu\text{m}$. On place la fente d'un spectroscopie dans le plan de l'écran, orientée dans le sens des franges, à la distance $x = 1,5 \text{ mm}$ du bord droit du miroir.

Déterminer le nombre de cannelures observées à travers le spectroscopie et calculer la plus petite longueur d'onde éteinte.

Solution

- ❶ Le système est non dispersif puisque ni le miroir ni l'air ne sont supposés dispersifs.
- ❷ Le spectre possède ici une frange centrale sombre comme le montre l'expression de $\delta(M)$ qui est égale à $\frac{\lambda_0}{2}$ pour $x = 0$. Cette frange est irisée de bleu vers l'intérieur et de rouge vers l'extérieur.



C'est le contraire si la frange centrale est blanche à savoir qu'elle est irisée de rouge vers l'intérieur et de bleu vers l'extérieur. En résumé, on observe des couleurs complémentaires dans les deux cas.

Dès que l'on s'éloigne suffisamment du centre de l'écran, celui-ci prend un aspect blanc. Il s'agit du blanc d'ordre supérieur dans lequel certaines radiations sont éteintes et dont les longueurs d'onde dépendent de la position x du point M considéré sur l'écran.

- ❸ On commence par rechercher les valeurs de l'entier m telles que :

$$\delta(M) = \frac{2xh}{d + \ell} + \frac{\lambda_0}{2} = (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2} \text{ et avec } (\lambda_{\min} = 0,4 \mu\text{m}) \leq \lambda_0 \leq (\lambda_{\max} = 0,8 \mu\text{m}).$$

Ce qui conduit à :

$$m \geq \frac{2xh}{\lambda_{\min}(d + \ell)} = 15,75 \text{ et } m \leq \frac{2xh}{\lambda_{\max}(d + \ell)} = 31,5.$$

Les valeurs possibles de m sont donc ici 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30 et 31. Il y a ainsi **16 cannelures**. La radiation de longueur d'onde λ minimale qui est éteinte pour cette position de M sur l'écran correspond à la plus grande des valeurs de m possibles puisque :

$$\lambda_0 = \frac{2xh}{m(d + \ell)} \text{ est inversement proportionnelle à } m.$$

Numériquement, on trouve : $\lambda_0 = 0,406 \mu\text{m}$.

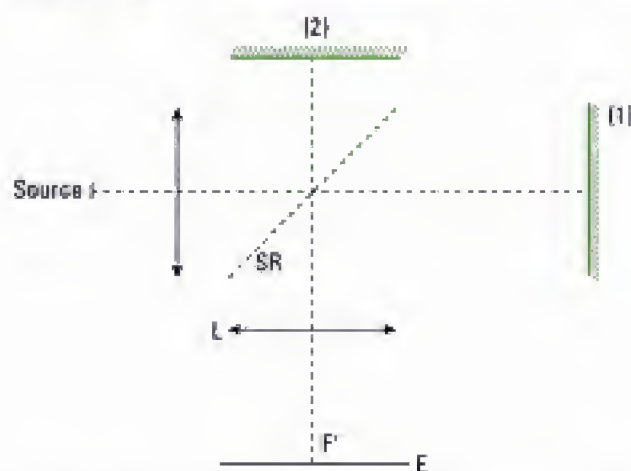
Exercices

Niveau 1

Ex. 1 Bilan énergétique d'un interféromètre de Michelson

Dans ce qui suit, on suppose les optiques idéales : lentilles parfaitement transparentes, miroirs totalement réfléchissants, lames semi-réfléchissantes divisant le faisceau incident en deux faisceaux d'intensités lumineuses égales.

La figure ci-dessous correspond au montage de principe d'un interféromètre de Michelson. Les miroirs sont réglés de telle façon que l'on observe des anneaux d'interférences circulaires sur l'écran E placé dans le plan focal de la lentille L, de distance focale image f' .



1) Quel est le rôle de la lame semi-réfléchissante SR ? Quel est celui de la lentille L ?

2) Montrer qu'avec ce montage la moitié du flux incident est irrémédiablement perdue.

Écrit, X, MP Physique 1, 2002

Ex. 2 Interférences avec une source ponctuelle

Pour obtenir des interférences à deux ondes, on peut utiliser soit un dispositif à division de front d'onde, soit un dispositif à division d'amplitude.

1) Préciser la localisation des franges en lumière monochromatique avec une source ponctuelle.

2) Comment sélectionner une raie quasi-monochromatique de la lumière émise par une lampe spectrale ?

Écrit, ENTPE, PC-PSI, 1997

Ex. 3 Constructions géométriques concernant l'interféromètre de Michelson

1) Étude de l'interféromètre réglé en lame d'air.

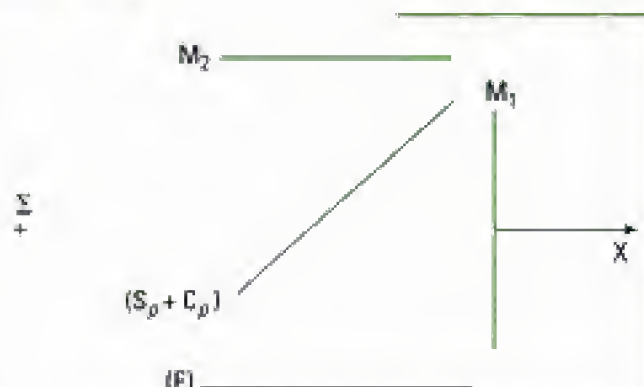


Figure 1 : Interféromètre de Michelson réglé en lame d'air

On considère un interféromètre de Michelson dont les miroirs M_1 et M_2 sont perpendiculaires. Les deux miroirs sont initialement à égale distance de l'ensemble séparatrice-compensatrice $(S_p + C_p)$. L'interféromètre est éclairé par une source ponctuelle Σ monochromatique, de longueur d'onde λ . On place un écran (E) à la « sortie » de l'interféromètre, parallèle au miroir M_2 .

On déplace le miroir M_1 d'une distance e parallèlement à lui-même, selon l'axe des x (figure 1).

a) Montrer l'équivalence de cette configuration avec une lame d'air (figure 2). [Les échelles de la figure 1 et de la figure 2 ne sont pas les mêmes.] À quoi correspondent dans le schéma équivalent M'_1 et S ? On appelle D la distance entre M_2 et l'écran E (dont on repère la position d'un point M par l'axe OX), et d la distance entre S et M_2 .

On suppose que D et d sont nettement plus grandes que e .

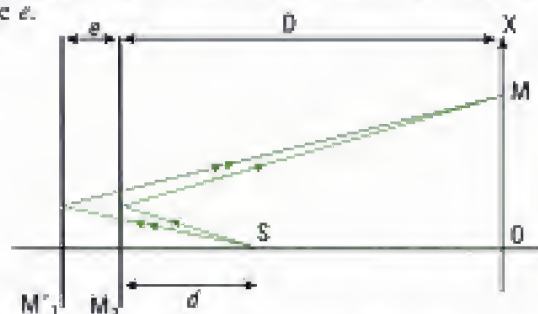


Figure 2 : Équivalence en lame d'air

b) Faire un dessin de deux rayons différents issus de la source réelle et interférant en un point M de (E) à partir de la figure 1.

2) Étude de l'interféromètre réglé en coin d'air.

On règle maintenant l'interféromètre de Michelson, éclairé par une source ponctuelle Σ émettant à la longueur d'onde λ , avec les miroirs M_1 et M_2 ne faisant plus un angle droit mais un angle :

$$\frac{\pi}{2} - \alpha, \text{ où } \alpha \text{ est un angle très faible (figure 3).}$$

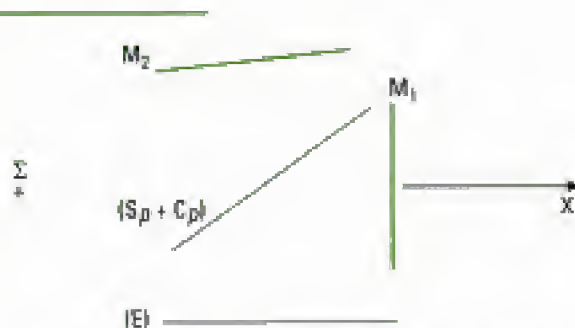


Figure 3 : Interféromètre de Michelson réglé en coin d'air

Montrer que le système considéré est équivalent à un coin d'air (figure 4). Faire un dessin avec deux rayons issus de Σ interférant en un point M de l'écran (E) disposé perpendiculairement à M_1 , à partir de la figure 3.

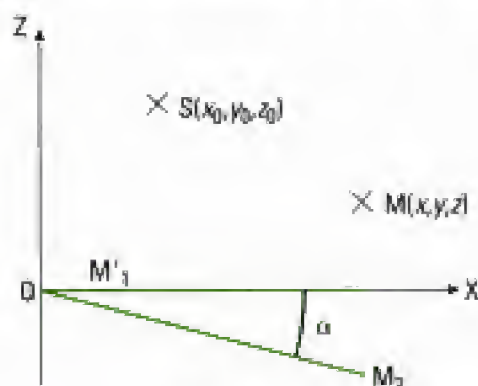


Figure 4 : Coin d'air

D'après écrit, CCP TSI, 2000

Ex. 4 Miroirs de Fresnel en lumière blanche

Une fente source S de lumière blanche, suffisamment fine, est placée parallèlement à l'arête commune Δ du dispositif des miroirs de Fresnel, d'angle $\alpha = 3 \cdot 10^{-3}$ rad, à la distance $d = 50$ cm de cette arête.

On place un écran (E) perpendiculairement à la direction moyenne des rayons lumineux qui interfèrent et à la distance $D = 2,5$ m de l'arête Δ .

(E) est percé d'une fente parallèle aux franges d'interférences observées sur l'écran à la distance de 1,2 mm de la frange centrale.

La lumière émise par cette fente est analysée à l'aide d'un spectroscope. On constate qu'il manque certaines raies dans le spectre du visible. Déterminer leurs longueurs d'onde.

Niveau 2

Ex. 5 Interférences avec source à profil rectangulaire

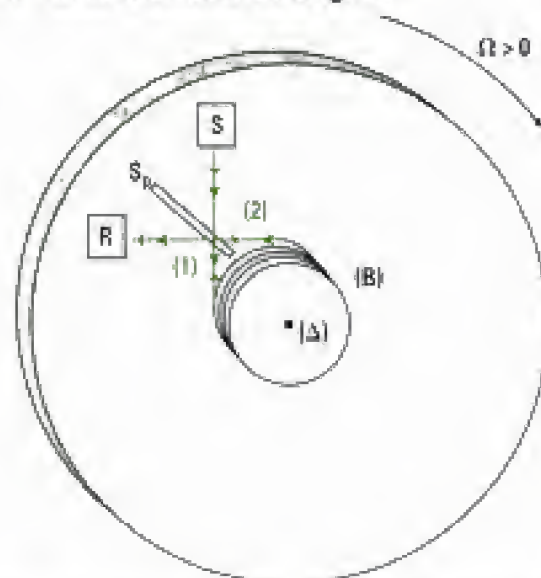
On reprend le dispositif interférentiel étudié dans l'exercice 11 du chapitre 3 avec la source S_1 éteinte et la source S_2 polychromatique.

On adopte pour S_1 le modèle d'une source à profil spectral rectangulaire dans un intervalle de longueur d'onde noté $[\lambda_1, \lambda_2]$.

Qu'observe-t-on au voisinage de l'écran ?

Oral, Mines-Ponts, MP, 2000

Ex. 6 Interféromètre de Sagnac



Une source lumineuse S éclaire une lame semi-réfléchissante S_p qui sépare le faisceau émis en deux parties (1) et (2).

Le faisceau (1), après traversée de S_p , est dirigé vers une des extrémités d'une bobine (B) de fibre optique constituée de $N = 200$ boucles et d'axe Δ . À la sortie de (B), (1) est dirigé vers S_p qui le transmet en direction d'un récepteur R. Le faisceau (2) est quant à lui réfléchi par S_p avant de parcourir (B) en sens inverse du faisceau (1). À sa sortie de (B), il est dirigé vers S_p qui le réfléchit en direction de R. On suppose

que S_p introduit un déphasage de $\frac{\pi}{2}$ par réflexion et aucun déphasage par transmission.

L'ensemble du montage est posé sur un plateau circulaire en rotation à la vitesse angulaire Ω autour de son axe de révolution Δ . L'onde lumineuse se propageant dans une boucle et dans le sens de rotation du plateau voit son chemin optique diminué de $\frac{\pi \cdot D^2 \cdot \Omega}{2c}$, où c représente la vitesse de la lumière dans

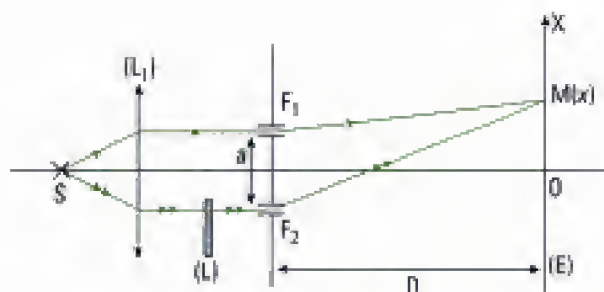
le vide et $D = 60$ cm désigne le diamètre de (B).

Déterminer la vitesse minimale Ω pour que deux ondes de longueur d'onde $\lambda = 543,5$ nm interfèrent avec un maximum d'intensité au niveau de R.

Oral, CCP, PC, 2002

Ex. 7 Fentes de Young en lumière blanche

On reprend l'étude du dispositif interférentiel déburrée dans l'exercice 8 du chapitre 3 dont on rappelle ici le schéma de principe :



La source S est ici une source de lumière blanche. L'indice de la lame de verre à faces parallèles (L) varie avec la longueur d'onde selon :

$$n(\lambda) = n_0 + \frac{C}{\lambda^2}.$$

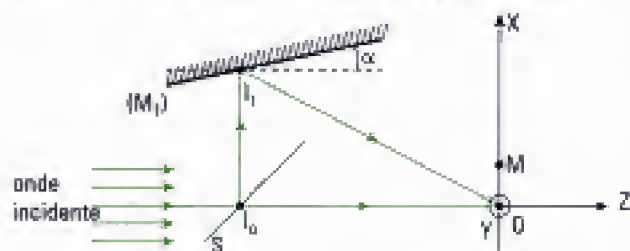
Décrire la figure d'interférences observée sur l'écran.

Oral, TPE, PC, 2001

Ex. 8 Division d'amplitude avec miroir et séparatrice

On considère une onde plane incidente monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0,6 \mu\text{m}$ et de direction parallèle à (OZ), une lame semi-réfléchissante S inclinée de $\frac{\pi}{4}$ par rapport à (OZ), de facteurs de

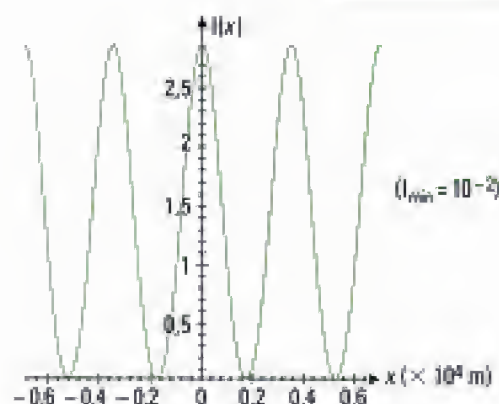
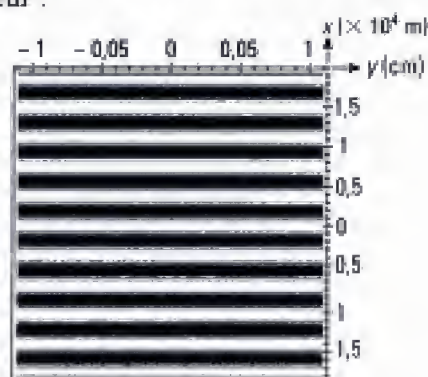
réflexion et de transmission égaux à $\frac{1}{2}$. Un miroir plan (M_1) dont la trace dans (OXZ) fait un angle α avec (OZ), est perpendiculaire au plan de figure :



On note A_0 l'amplitude de l'onde transmise par S suivant (OZ) et A_1 celle de l'onde réfléchi par (M_1).

1) Exprimer l'intensité lumineuse au point $M(x, y)$ de coordonnées x et y dans (OXY). On admettra que les deux rayons qui interfèrent sont en phase en O.

2) On place dans le plan (OXY) une pellicule photographique dont les observations sont disponibles sur ordinateur :



Déterminer l'angle α .

3) Exprimer le facteur de visibilité des franges en fonction de :

$$\rho = \frac{A_1}{A_0},$$

puis calculer ρ en utilisant la figure d'interférences.

4) On intercale, entre la lame semi-réfléchissante et le miroir plan, une lame d'épaisseur e constante, perpendiculaire à $I_0 I_1$, d'indice $n = 1,5$. On observe alors le défilement de 4 franges au point O. Calculer e .

Oral, Centrale-Supélec, PC, 2003

Niveau 3

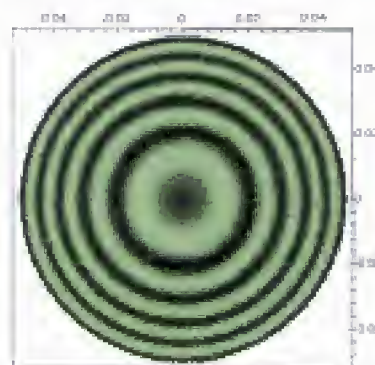
Ex. 9 Étude des franges annulaires

1) On souhaite étudier des figures d'interférences obtenues à l'aide de l'interféromètre, de Michelson éclairé par une lampe à vapeur de mercure (radiation de couleur verte supposée filtrée).

a) Peut-on considérer que cette lampe est une source ponctuelle ?

b) Comment peut-on réaliser expérimentalement une source quasi-ponctuelle ?

2) On considère la condition de source ponctuelle réalisée ; on règle l'interféromètre puis on relève sur l'écran d'observation l'enregistrement donné ci-dessous :

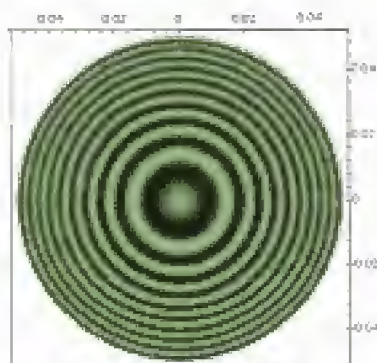


Les graduations du champ d'interférences sont données en mètre.

Les deux sources secondaires sont notées S_1 et S_2 .

L'écran est placé à la distance $D = 1$ m du milieu de $(S_1 S_2)$. On donne la longueur d'onde de la lumière filtrée : $\lambda_0 = 546,10$ nm.

- Comment est réglé l'interféromètre ?
 - L'ordre au centre p_0 de la figure d'interférences est ici égal à 3 974,4. Quelle est la nature de la frange centrale ? Pourrait-on avoir $p_0 = 3 975$ avec un tel enregistrement ?
 - Calculer l'écartement a des deux sources secondaires avec le nombre de chiffres significatifs adéquat. Commenter la précision de ce dernier résultat sachant que le vernier qui mesure le déplacement du miroir mobile de l'interféromètre utilisé en travaux pratiques est gradué en centième de millimètre.
 - Mesurer les rayons des troisième et quatrième franges brillantes en partant du centre. Comparer ces valeurs aux résultats prévus par la théorie. En déduire la valeur locale de l'interfrange.
 - Pourquoi les anneaux sont-ils plus resserrés vers l'extérieur du champ d'interférences ?
- 3) On modifie le réglage de l'interféromètre et on relève l'enregistrement ci-dessous :



Les graduations sont données en mètre.

- L'écran n'ayant pas été déplacé et la source étant identique et n'ayant pas subi de variation de température notable, indiquer quelle opération a été effectuée avec l'interféromètre ?
- Déterminer numériquement l'épaisseur de la lame d'air de l'interféromètre.
- On décide à présent d'utiliser une lampe spectrale à vapeur de sodium dont on sélectionne le doublet jaune. Le réglage de l'interféromètre reste identique. Que va-t-on observer sur la figure d'interférences lorsque le miroir mobile est translaté ?

Ex. 10 Interféromètre de Michelson éclairé par une source ponctuelle

On reprend l'étude entamée à l'exercice 3 de ce chapitre. Les notations et les figures sont conservées dans ce qui suit.

1) Étude de l'interféromètre réglé en lame d'air

- On cherche à calculer la différence de marche entre les rayons issus de S (figure 2) et qui interfèrent en un point M de (E) tel que $OM = X$, en se limitant aux rayons peu inclinés sur l'axe OS . Montrer que cette différence de marche est donnée par :

$$\delta = 2e \left(1 - \frac{X^2}{2(D+d)^2} \right)$$

Justifier que les franges sont des anneaux.

- On suppose, pour simplifier, que :

$$2e = p_0 \lambda, \text{ où } p_0 \text{ est un entier.}$$

Qu'observe-t-on en O ? Lorsque l'on s'éloigne de O , on observe une alternance d'anneaux sombres et brillants. Quel est l'ordre d'interférence p correspondant à l'anneau brillant numéro m (que l'on exprimera en fonction de p_0 et m) ?

Exprimer le rayon X_m de cet anneau en fonction de D , d , λ , e et m . Calculer numériquement X_m pour m variant de 0 à 5 (on présentera les résultats sous la forme d'un tableau), $e = 1$ mm, $D + d = 1$ m et $\lambda = 0,5$ μ m. Tracer X_m en fonction de m . Comment évolue la distance entre deux anneaux successifs ?

2) Étude de l'interféromètre réglé en coin d'air

Se reporter à la figure 4 de l'exercice 3.

La source S (qui a même signification que dans la partie 1) est repérée par ses coordonnées (x_0, y_0, z_0) ; le point M par ses coordonnées notées (x, y, z) . Le repère $OXYZ$ est direct.

On fera les hypothèses suivantes : α est petit (on assimilera donc $\tan \alpha$ et $\sin \alpha$ à α et on ne gardera pas les termes en α d'ordre supérieur ou égal à deux), et x, x_0, y, y_0 sont très inférieurs à $(z + z_0)$.

- Montrer que les images S_1 et S_2 de S données respectivement par M_1' et M_2 ont pour coordonnées (dans le cadre de nos hypothèses) :

$$S_1(x_0, y_0, -z_0) \text{ et } S_2(x_0 - 2\pi\alpha_1, y_0 - z_0 - 2x_0\alpha).$$

- Montrer que la différence de chemin optique entre deux rayons qui interfèrent en M s'écrit :

$$\delta = S_2M - S_1M = \frac{2\alpha(x_0z + xz_0)}{(z + z_0)}.$$

- On observe les interférences sur un écran (E) parallèle au miroir M_1' à la côte z . Quelle est l'allure des franges ? Que vaut l'interfrange ? Donner la position de la frange centrale x , définie par un ordre

d'interférences $p = \frac{\delta}{\lambda}$ nul. Dans quel cas l'interfrange

est-il indépendant de la position de l'écran ? Quelle est la valeur de l'interfrange dans ce cas ?

Écrit, CCR/TSI, 2000

Indications

Ex. 3

Il faut effectuer le repliement de l'interféromètre.

Ex. 4

Lorsqu'une radiation n'est pas visible, l'intensité lumineuse due aux interférences est alors nulle pour la longueur d'onde associée.

Ex. 7

Utiliser la méthode n° 2 sachant que le système est dispersif à cause de la présence de la lame de verre.

Ex. 8

1) On étudie les interférences entre deux ondes planes d'amplitudes différentes.

2) ρ doit être exprimé en fonction des valeurs minimale et maximale de l'intensité lumineuse dans le plan (Oxy).

Ex. 9

2) c) Utiliser les résultats établis au chapitre 3 pour les interférences à deux sources secondaires.

Ex. 10

1) a) Commencer par effectuer un développement limité en $\frac{X}{D+d}$.

2) a) Raisonner à partir d'une construction géométrique.

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1

1) • Rôle de la lame semi-réfléchissante

Elle sépare le faisceau incident émis par la source et réalise la division d'amplitude de l'onde incidente. Une partie du faisceau est transmise vers le miroir (1) (premier bras de l'interféromètre) et l'autre partie réfléchi vers le miroir (2) (deuxième bras).

• Rôle de la lentille L

Elle permet d'observer la figure d'interférences (due à l'interféromètre) dans son plan focal image confondu avec l'écran E.

2) Notons I_0 l'intensité lumineuse du faisceau reçu par la séparatrice SR. Avec l'hypothèse de l'énoncé sur les coefficients de réflexion et de transmission en énergie, l'onde transmise vers (1) a pour intensité $0,5 I_0$ et il en est de même pour celle qui est réfléchi par SR vers (2).

Après réflexion sur (1), le faisceau lumineux traverse à nouveau SR et réfléchit $0,25 I_0$ vers L. De même, (2) réfléchit vers SR un faisceau d'intensité égale à $0,5 I_0$, dont 25 % sont transmis vers L.

Conclusion : 50 % du flux énergétique émis par la source est renvoyé vers celle-ci et perdu.

Exercice 2

1) Envisageons ici deux cas de figure.

• *Premier cas :* la source ponctuelle S est située à distance finie de l'interféromètre.

Que l'interféromètre soit à division de front d'onde ou à division d'amplitude, on est ramené au cas d'interférences entre deux ondes sphériques issues de deux sources secondaires S_1 et S_2 (réelles ou virtuelles) images de S. Les **interférences** sont donc **non localisées** (revoir la figure 5 du chapitre 3 par exemple).

• *Deuxième cas :* la source ponctuelle est située à « l'infini ».

En pratique, cela signifie par exemple qu'elle est placée au foyer objet d'une lentille mince convergente. Dans les deux cas (front d'onde ou amplitude), l'onde incidente émise par S est plane et les deux ondes issues de l'interféromètre et qui interfèrent sont également planes. En ce cas, les interférences, lorsqu'elles existent, sont **également non localisées**.

Citons le cas particulier de l'interféromètre de Michelson réglé en lame d'air à faces parallèles. Les ondes planes issues des deux bras de l'interféromètre ont alors la même direction de propagation qui est celle de la normale à la lame d'air. Ainsi, en tout point du champ d'interférences, la différence de marche est constante et s'écrit $\delta = 2e$ où e désigne l'épaisseur de la lame. L'éclairement est en ce cas uniforme puisqu'il ne dépend pas de la position du point considéré.



Ce résultat peut être retrouvé à partir de l'étude menée au paragraphe A.1 du chapitre 3. Il s'agit du cas où l'angle

α tend vers 0. L'interfrange $i = \frac{\lambda}{2\alpha}$ tend alors vers l'infini, ce qui donne un éclairement uniforme.



Il n'est pas nécessaire que la source soit monochromatique pour pouvoir observer des interférences. Toutefois, le cours nous a montré que l'observation et l'interprétation du phénomène d'interférences sont plus aisées en ce cas.

2) Le plus simple est d'utiliser un **filtre optique sélectif** (filtre interférentiel ou à absorption).

Exercice 3

1) a) Commençons par rechercher, à l'aide d'une construction géométrique, l'image S_2 de Σ donnée par le bras 2 de l'interféromètre qui comprend l'ensemble $(S_p + C_p)$ suivi du miroir M_2 :

$$\Sigma \xrightarrow{(S_p + C_p)} S \xrightarrow{M_2} S_2.$$

S est symétrique du point Σ par rapport à $(S_p + C_p)$ et S_2 est symétrique de S par rapport à M_2 . D'où :

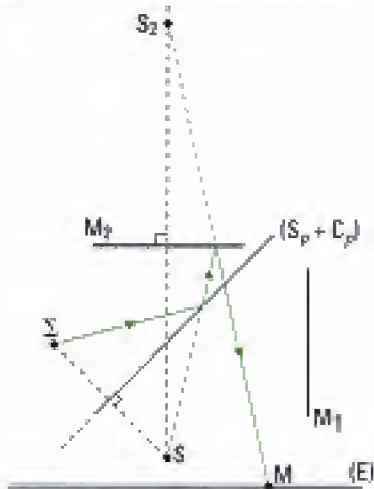


Figure 1

La traversée de $(S_p + C_p)$ par le rayon réfléchi sur M_2 se fait sans déviation.

De même, on recherche l'image S_1 de Σ donnée par le bras 1 qui comprend $(S_p + C_p)$ et M_1 . Comme la traversée de $(S_p + C_p)$ se fait sans déviation, on a les images successives telles que :

$$\Sigma \xrightarrow{M_1} S' \xrightarrow{(S_p + C_p)} S_1.$$

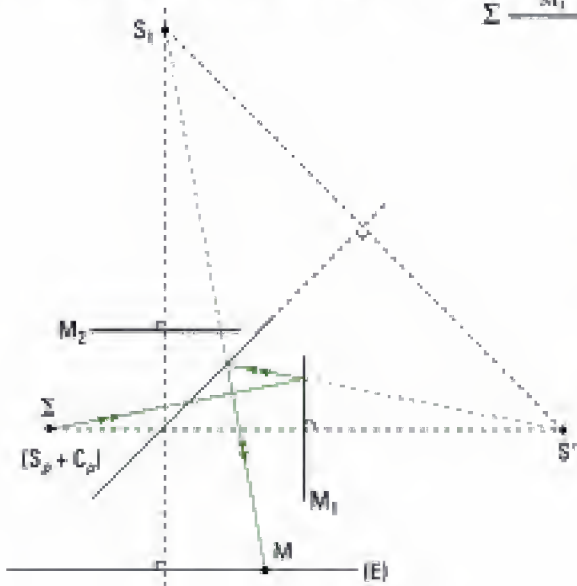


Figure 2

Remarquons alors qu'il est possible, dans le cas de la figure 2, d'effectuer une symétrie par rapport à $(S_p + C_p)$ du trajet suivi par le rayon depuis sa traversée de $(S_p + C_p)$ jusqu'à sa réflexion sur celle-ci sans modifier pour autant le chemin optique parcouru. Cette opération de repliement conduit à introduire également le symétrique M'_1 de M_1 par rapport à $(S_p + C_p)$ ce qui conduit à la figure 3.

On obtient donc bien la figure 2 de l'énoncé. **S correspond à l'image de Σ à travers $(S_p + C_p)$ et M'_1 correspond à l'image de M_1 à travers $(S_p + C_p)$.**

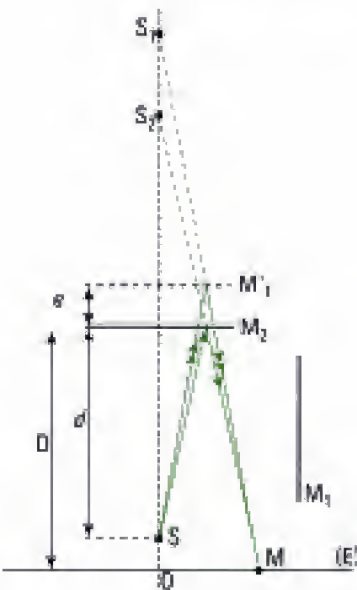


Figure 3

b) On obtient la figure 4 qui représente le trajet suivi par ces rayons issus de Σ et qui interfèrent au point M.

En pratique, on construit le chemin suivi par le rayon en utilisant le principe de retour inverse de la lumière. Par exemple, pour le rayon traversant le bras 2, on trace le support passant par M et S_2 ce qui permet de tracer le rayon IM réfléchi par M_2 . On trace ensuite le support passant par I et S ce qui permet de tracer le rayon JI réfléchi par $(S_p + C_p)$. On termine le tracé en traçant le rayon SJ. En procédant de même pour le rayon traversant le bras 1, on obtient la figure 4.

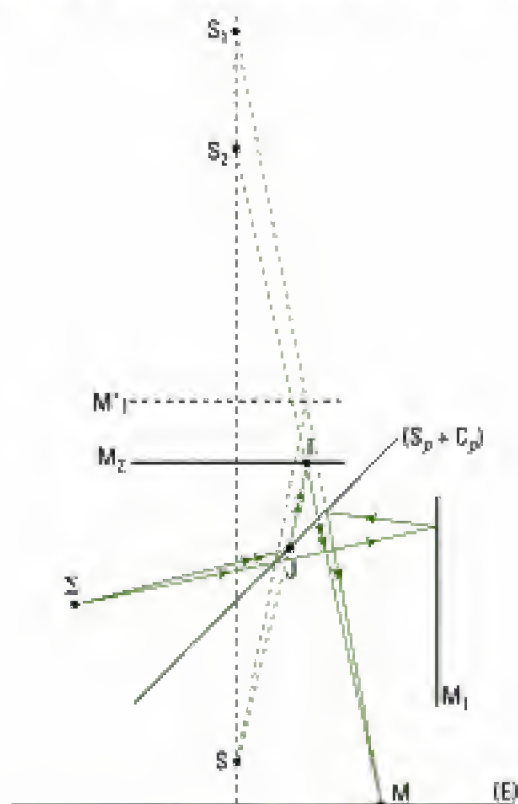


Figure 4

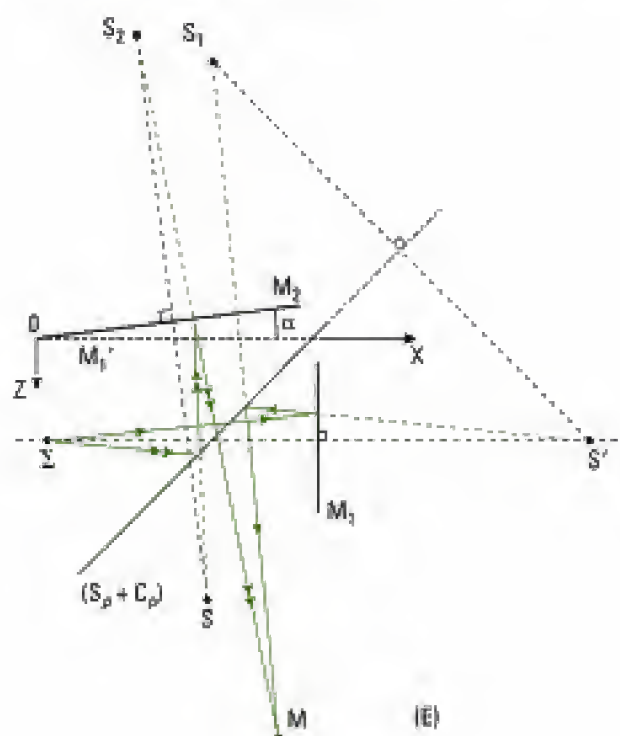


Figure 5

2) La méthode de construction est analogue au cas de la lame d'air.

Dans le bras 2 :

$$\Sigma \xrightarrow{(S_p + C_p)} S \xrightarrow{M_2} S_2$$

Dans le bras 1 :

$$\Sigma \xrightarrow{M_1} S' \xrightarrow{(S_p + C_p)} S_1$$

En notant toujours M'_1 le symétrique de M_1 par rapport à $(S_p + C_p)$, on obtient la figure 5 ci-dessus.

(revoir le cours pour le détail des étapes comme à la question 1).

Exercice 4

Lorsqu'une radiation de longueur d'onde λ du spectre visible est absente, cela signifie qu'au point M de (E) considéré, l'intensité lumineuse $I(M)$ due à cette radiation est nulle. La différence de marche vérifie donc :

$$\delta(M) = (2m + 1) \cdot \frac{\lambda}{2} \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Nous reprenons l'expression de la différence de marche qui a été établie en cours dans le chapitre 3 :

$$\delta(M) = \frac{2\alpha \cdot d \cdot x}{d + D}$$

au point M d'abscisse x sur (E) sur un axe (OX) parallèle à la direction (S_1, S_2) des sources secondaires. Il vient alors :

$$\frac{2\alpha \cdot d \cdot x}{d + D} = (2m + 1) \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (\text{cf. méthode n° 2})$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{2\alpha \cdot d \cdot x}{\lambda(d + D)} - \frac{1}{2}$$

Or la source étant de lumière blanche, son spectre s'étend approximativement de $\lambda_{\min} = 0,4 \mu\text{m}$ à $\lambda_{\max} = 0,8 \mu\text{m}$, et donc :

$$\frac{2\alpha \cdot d \cdot x}{\lambda_{\max}(d + D)} - \frac{1}{2} \leq m \leq \frac{2\alpha \cdot d \cdot x}{\lambda_{\min}(d + D)} - \frac{1}{2}$$

A.N. : $1 \leq m \leq 2,5$ (pour $x = 1,2 \text{ mm}$).

m appartenant à \mathbb{Z} , il y a ici deux raies absentes du spectre visible qui correspondent aux valeurs $m = 1$ et $m = 2$ (spectre cannelé). Les longueurs d'ondes associées étant :

• pour $m = 1$:

$$\lambda_1 = \frac{4\alpha d \cdot x}{(2m + 1) \cdot (d + D)} = \frac{4\alpha \cdot d \cdot x}{3(d + D)}$$

• pour $m = 2$:

$$\lambda_2 = \frac{4\alpha \cdot d \cdot x}{5(d + D)}$$

A.N. : $\lambda_1 = 0,80 \mu\text{m}$ et $\lambda_2 = 0,48 \mu\text{m}$.

Exercices de niveau 2

Exercice 5

Nous rappelons tout d'abord les résultats obtenus à l'exercice 11 du chapitre 3 correspondants à la situation envisagée, à savoir S_2 éteinte :

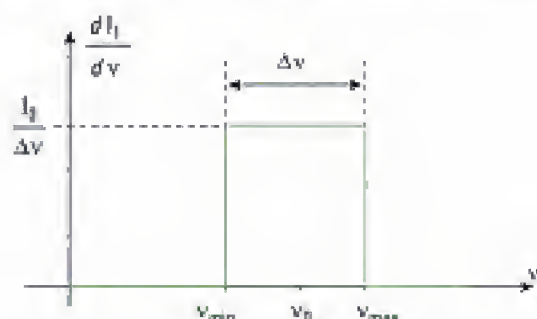
• différence de marche en un point M d'abscisse x sur l'écran :

$$\delta_1 = \frac{4\ell \cdot (x + a)}{D}$$

• intensité lumineuse en ce point :

$$I_1 = 2I_0 \cdot \left[1 + \cos\left(\frac{8\pi\ell}{\lambda D} \cdot (x + a)\right) \right]$$

Représentons également l'allure de la répartition spectrale de l'intensité de la source S_1 en utilisant la variable fréquence ν (cf. méthode n° 1) :



avec : $\nu_{\min} = \frac{c}{\lambda_2}$

$$\nu_{\max} = \frac{c}{\lambda_1}$$

ν_0 : fréquence centrale

$\Delta\nu = \nu_{\max} - \nu_{\min}$: largeur spectrale

Hidden page

Hidden page

Ainsi, la différence de marche entre (1) et (2) pour une boucle s'écrit :

$$\delta = 2 \times \frac{\pi \cdot D^2 \cdot \Omega}{2c} = \frac{\pi \cdot D^2 \cdot \Omega}{c}.$$

Soit pour la traversée complète de (B) qui comporte N boucles :

$$\delta = \frac{N \cdot \pi \cdot D^2 \cdot \Omega}{c} \text{ (différence de marche de l'onde (2) par rapport à l'onde (1)).}$$

Enfin, pour exprimer la différence de marche totale entre (1) et (2), il faut aussi tenir compte du déphasage supplémentaire égal à $\frac{\pi}{2}$ introduit par S_p à chaque réflexion. Or ici (1) subit deux transmissions sur S_p , tandis que (2) subit deux réflexions. Il faut donc ajouter une différence de marche supplémentaire égale à $\frac{\lambda_0}{2}$ entre (1) et (2) pour obtenir la différence de marche totale au niveau de R :

$$\delta_{\text{tot}} = N \cdot \frac{\pi \cdot D^2 \cdot \Omega}{c} + \frac{\lambda_0}{2}, \text{ donc : } \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \delta_{\text{tot}} = 2\pi \cdot \left[N \cdot \frac{\pi \cdot D^2 \cdot \Omega}{\lambda_0 \cdot c} + \frac{1}{2} \right].$$

L'intensité lumineuse étant maximale, on a :

$$2\pi \cdot \left[N \cdot \frac{\pi \cdot D^2 \cdot \Omega}{\lambda_0 \cdot c} + \frac{1}{2} \right] = m \cdot 2\pi, \text{ soit : } \Omega(m) = \frac{\left(m - \frac{1}{2}\right) \cdot \lambda_0 \cdot c}{N \cdot \pi \cdot D^2}, \text{ avec } m \in \mathbb{N} \text{ pour } \Omega \text{ positive.}$$

Ω minimale est obtenue pour la valeur de $m = 1$, donc :

$$\boxed{\Omega_{\min} = \frac{\lambda_0 \cdot c}{2N \cdot \pi \cdot D^2}} \quad \text{A.N. : } \Omega_{\min} = 0,36 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Exercice 7

Rappelons tout d'abord l'expression trouvée pour la différence de marche en un point M de l'écran d'abscisse x :

$$\delta(M) = \frac{a \cdot x}{D} + (n - 1) \cdot e.$$

• Peut-on encore parler dans cette expérience de frange centrale comme cela a été vu dans l'exercice 8 du chapitre 3 ?

Celle-ci étant définie par la condition $\delta(M) = 0$, sa position x_0 est telle que :

$$\frac{a \cdot x_0}{D} + (n - 1) \cdot e = 0 \Rightarrow x_0 = - \frac{(n - 1) \cdot D \cdot e}{a}.$$

Mais ici n est une fonction de λ , par conséquent la position x_0 du lieu d'interférence pour lequel on a $\delta(M) = 0$ n'est pas la même pour toutes les radiations du spectre visible (λ désigne dans cet exercice une longueur d'onde *dans le vide*). On ne peut donc plus parler de frange centrale pour l'ensemble des radiations car le système interférentiel est dispersif (cf. méthode n° 2).

• Peut-on néanmoins définir une frange pour laquelle l'ordre d'interférence $p(M, \lambda)$ varie peu sur l'ensemble du spectre visible ?

Si tel est le cas, alors l'intensité lumineuse au point M considéré :

$$I(M, \lambda) = 4I_0 \cdot \cos^2(\pi \cdot p(M, \lambda))$$

varie peu sur l'étendue du spectre du visible, ce qui n'est possible qu'à la condition où :

$$p(M, \lambda) \text{ varie peu avec } \lambda \Rightarrow \frac{dp(M, \lambda)}{d\lambda} = 0.$$

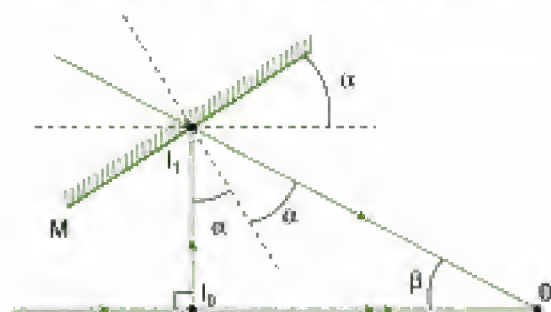


Il ne faut pas en conclure qu'une telle frange est brillante ! En effet, tout va dépendre de la valeur de p . Si p est entier, cette frange non colorée (par rapport à ses voisines) est brillante, mais elle est sombre si p est demi entier ou d'intensité intermédiaire pour d'autres valeurs de p . Cette frange est dite *achromatique*.

Hidden page

 $\Delta\varphi(M)$ dépend des coordonnées du point M. Il faut évaluer $\vec{u}_1 \cdot \vec{OM}$ en introduisant ces coordonnées.

La direction de \vec{u}_1 est donnée par l'angle β qu'il faut ici relier à l'angle α :



Le triangle $I_0 I_1 O$ étant rectangle en I_0 ,

il vient : $\beta = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$.

Avec \vec{OM} de coordonnées $(x, y, 0)$ et \vec{u}_1 de coordonnées $(-\sin \beta, 0, \cos \beta)$, on a :

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{OM} = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) \cdot x = -\cos(2\alpha) \cdot x$$

soit :

$$\Delta\varphi(M) = -\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \cos(2\alpha) \cdot x$$

et :

$$I(M) = A_0^2 + A_1^2 + 2 \cdot \sqrt{A_0^2 \cdot A_1^2} \cdot \cos \Delta\varphi(M),$$

donc :

$$I(M) = A_0^2 + A_1^2 + 2A_0 \cdot A_1 \cdot \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \cos(2\alpha) \cdot x\right].$$

2) Conformément à l'expression de $I(M)$, les simulations montrent que les franges d'interférences dans le plan (OXY) sont rectilignes dirigées selon (OY), parallèles entre elles et équidistantes. Pour déterminer l'angle α , il faut mesurer sur les simulations l'interfrange i qui vaut ici :

$$i \approx 3,9 \cdot 10^{-5} \text{ m.}$$

L'expression de $I(M)$ conduit à l'expression de l'interfrange suivante :

$$i = \frac{\lambda}{\cos(2\alpha)} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{\lambda}{i}\right).$$

Ainsi, il vient :

$$\alpha = \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{0,6}{35}\right) = 44,5^\circ.$$

3) • Expression du facteur de visibilité en fonction de $\rho = \frac{A_1}{A_0}$

Le facteur de visibilité V est défini selon :

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\min} + I_{\max}}$$

avec I_{\max} l'intensité lumineuse maximale et I_{\min} l'intensité lumineuse minimale recueillies dans le plan (OXY). Ici on a :

$$I_{\max} = A_0^2 + A_1^2 + 2A_0 A_1 \text{ et } I_{\min} = A_0^2 + A_1^2 - 2A_0 A_1$$

donc :

$$V = \frac{4A_0 A_1}{2(A_0^2 + A_1^2)} = 2 \times \frac{\frac{A_1}{A_0}}{1 + \left(\frac{A_1}{A_0}\right)^2} = \boxed{\frac{2\rho}{1 + \rho^2}}$$

• Calcul de ρ

La simulation qui représente $I(x)$ permet de mesurer les grandeurs I_{\max} et I_{\min} . Ainsi, en exprimant A_0 et A_1 en fonction de I_{\max} et I_{\min} , on détermine ρ :

$$I_{\max} = A_0^2 + A_1^2 + 2A_0 \cdot A_1 = (A_0 + A_1)^2$$

$$I_{\min} = A_0^2 + A_1^2 - 2A_0 \cdot A_1 = (A_0 - A_1)^2$$

D'où :
$$A_0 + A_1 = \sqrt{I_{\max}}$$
$$A_0 - A_1 = \sqrt{I_{\min}}$$
(car ici on ne peut qu'avoir $A_1 < A_0$ si $A_1 \neq A_0$)

donc :
$$\begin{cases} A_0 = \frac{1}{2} (\sqrt{I_{\min}} + \sqrt{I_{\max}}) \\ A_1 = \frac{1}{2} (\sqrt{I_{\max}} - \sqrt{I_{\min}}) \end{cases}$$

et :
$$\rho = \frac{A_1}{A_0} = \frac{\sqrt{I_{\max}} - \sqrt{I_{\min}}}{\sqrt{I_{\max}} + \sqrt{I_{\min}}}$$

A.N. : sur la simulation $I(x)$, on a (aux erreurs de lecture près) :

$$I_{\max} = 2,80 \text{ et } I_{\min} = 0,01 \Rightarrow A_0 = 0,89, A_1 = 0,79 \text{ et } \rho = 0,89.$$

4) La différence de marche δ introduite par la lame de verre s'écrit ici :

$$\delta = (n - 1) \cdot e.$$

Ici 4 franges d'interférences ont défilé au point O, ce qui signifie que la variation de l'ordre d'interférence est égale à 4 :

$$\Delta p(O) = 4 \text{ avec } \Delta p(O) = \frac{\Delta \delta(O)}{\lambda}.$$

La variation de la différence de marche $\Delta \delta(O)$ étant ici uniquement due à la lame de verre, on a :

$$\Delta p(O) = \frac{(n - 1) \cdot e}{\lambda}$$

soit :
$$e = \frac{\lambda \cdot \Delta p(O)}{n - 1} \quad \text{A.N. : } e = 4,8 \text{ } \mu\text{m}.$$

Exercices de niveau 3

Exercice 9

1) a) Une lampe spectrale a nécessairement une certaine étendue et **ne peut donc pas être considérée comme une source ponctuelle**.

b) On utilise **une source étendue qui éclaire, au travers d'un condenseur assez convergent, un petit trou source ou un diaphragme circulaire suffisamment fermé**.

2) a) On observe sur l'écran des franges en forme d'anneaux. Par conséquent, l'interféromètre de Michelson est réglé en **lame d'air** (les miroirs sont orthogonaux).

b) • Nature de la frange centrale

L'observation de l'enregistrement montre que la frange centrale n'est **ni sombre ni brillante**. La valeur numérique de p_0 donnée par l'énoncé confirme cette observation puisqu'elle n'est ni entière ni demi-entière.

On peut par ailleurs préciser que cette frange centrale est plus sombre que claire ce qui est en accord avec le constat que le nombre 3974,4 est plus proche du demi entier 3974,5 que de l'entier 3974.

• Pourrait-on avoir $p_0 = 3975$?

Il n'est pas possible d'avoir $p_0 = 3975$ pour cet enregistrement car la frange centrale n'est pas brillante.

c) • Calcul de l'écartement a des deux sources

Rappelons l'expression de l'ordre d'interférence en un point M du champ d'interférences qui a été établi au chapitre 3 paragraphe A.2.6 :

$$\rho(M) = \frac{a}{\lambda_0} \left(1 - \frac{\rho^2}{2D^2} \right) \quad (\text{il est donc maximal au centre}).$$

Au centre, on a $\rho = 0$ et il vient :

$$\rho_0 = \frac{a}{\lambda_0} \quad \text{soit :} \quad \boxed{a = \rho_0 \lambda_0}$$

A.N. : le résultat numérique doit être ici donné avec cinq chiffres significatifs puisqu'il en est de même pour ρ_0 et λ_0 :

$$a = 3974,4 \times 546,10 \cdot 10^{-9} = 2170,4 \mu\text{m}.$$

• Commentaire sur la précision du résultat

Nous avons montré en cours que le déplacement e du miroir mobile, compté à partir du contact optique, est tel que $a = 2e$. La mesure du déplacement e doit donc être connue avec la même précision que celle de a . Mais avec un vernier gradué au centième de millimètre, **il est impossible d'avoir une telle précision.**

d) • Mesure des rayons sur l'enregistrement

À l'aide des graduations données sur l'enregistrement, on mesure le diamètre des troisième et quatrième franges brillantes (ce qui permet de réduire l'incertitude de mesure des rayons...). On trouve, aux erreurs de mesure près :

- le rayon du troisième anneau brillant égal à 3,5 cm ;
- le rayon du quatrième anneau brillant égal à 4,1 cm.

• Comparaison aux résultats théoriques

Rappelons l'expression du rayon de la frange brillante d'ordre m qui a été établie au chapitre 3 paragraphe A.2.6 :

$$\rho_m = \sqrt{2D^2 \left(1 - m \frac{\lambda_0}{a} \right)} = \sqrt{2D^2 \left(1 - \frac{m}{\rho_0} \right)} \quad (1)$$

Pour effectuer le calcul de ces rayons, il est donc nécessaire de déterminer au préalable l'ordre d'interférence associé à chacune de ces franges.

Puisque l'ordre au centre est égal à 3974,4 et qu'il est maximal, la première frange brillante est associée à l'entier m immédiatement inférieur, soit ici 3974. Il vient ainsi :

• $m = 3972$ pour la troisième frange brillante, donc :

$$\rho = \sqrt{2 \times \left(1 - \frac{3972}{3974,4} \right)} = 3,47 \text{ cm} ;$$

• $m = 3971$ pour la quatrième frange brillante, donc :

$$\rho = \sqrt{2 \times \left(1 - \frac{3971}{3974,4} \right)} = 4,14 \text{ cm}.$$

L'accord avec les résultats théoriques est donc satisfaisant puisque l'écart relatif est voisin de 1 % sur ces rayons.

• Valeur de l'interfrange i

C'est une grandeur locale que l'on calcule donc ici entre les troisième et quatrième franges :

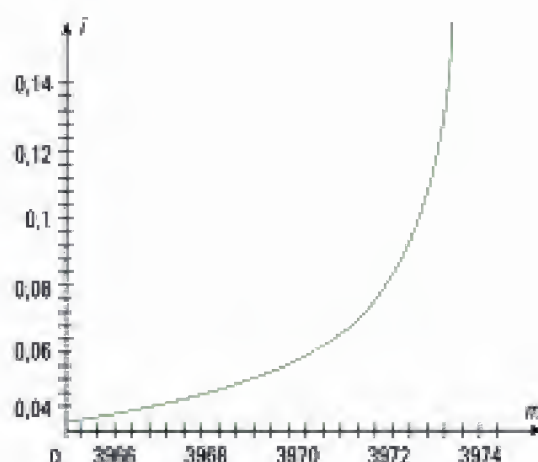
$$i = \rho(m = 3971) - \rho(m = 3972) = 4,14 - 3,47 = 0,67 \text{ cm}.$$

e) Si les anneaux sont plus resserrés vers l'extérieur que vers le centre de la figure d'interférences, cela signifie que l'interfrange i tend à diminuer lorsque l'ordre d'interférence diminue. Or entre la frange brillante d'ordre m et la frange brillante d'ordre $m + 1$, on a :

$$i = \rho_m - \rho_{m+1} = \sqrt{2D^2 \left(1 - \frac{m}{\rho_0} \right)} - \sqrt{2D^2 \left(1 - \frac{m+1}{\rho_0} \right)}.$$

Soit numériquement :

$$i = \sqrt{2(1 - 251,6 \cdot 10^{-6} m)} - \sqrt{2(1 - 251,6 \cdot 10^{-6} (m+1))}$$



L'interfrange est donc une fonction croissante de l'entier m ce qui est en accord avec l'observation faite sur l'enregistrement.

3) a) En comparant avec le premier enregistrement, on constate que la teinte de la frange centrale est cette fois plutôt claire que sombre ce qui indique que l'ordre d'interférence au centre a été modifié. Or celui-ci ne dépend que de a et de la longueur d'onde λ_0 qui est quasiment constante au cours de l'expérience étudiée. En effet, l'énoncé indique que la température de la source est stable ce qui exclut toute modification de la raie spectrale, ce qui serait possible par exemple si la lampe venait juste d'être allumée après un court moment de refroidissement... C'est donc le paramètre a qui est modifié et l'on en conclut que **le miroir mobile a été translaté parallèlement à lui-même, sans modification de son inclinaison** (sinon, on ne peut plus observer de franges parfaitement circulaires).

b) Pour répondre à cette question, on commence par déterminer la distance a entre les deux sources secondaires. Repartons de la relation (1) pour extraire ρ_m^2 et ρ_{m+1}^2 :

$$\rho_m^2 = 2D^2 \left(1 - m \frac{\lambda_0}{a} \right) \text{ et } \rho_{m+1}^2 = 2D^2 \left(1 - (m+1) \frac{\lambda_0}{a} \right)$$

donc :
$$\frac{\lambda_0}{a} = \frac{\rho_m^2 - \rho_{m+1}^2}{2D^2}, \text{ soit : } a = \frac{2D^2 \lambda_0}{\rho_m^2 - \rho_{m+1}^2}.$$

En considérant par exemple les rayons des quatrième et cinquième franges brillantes en partant du centre de la figure d'interférences, on mesure :

– pour la quatrième frange : $\rho_{m+1} = 3,2 \text{ cm}$

– pour la cinquième frange : $\rho_m = 3,6 \text{ cm}$

ce qui conduit à : $a = 4 \text{ mm}$.

 La précision du résultat est ici imposée par la mesure faite sur l'enregistrement qui ne peut excéder dans cet exercice le millimètre.

On en déduit l'épaisseur e de la lame d'air sachant que dans ce cas, on a :

$$a = 2e, \text{ soit : } e = \frac{a}{2} = 2 \text{ mm}.$$

4) La particularité du montage réside ici dans le fait qu'on a sélectionné le doublet de cette source. Le cours nous a montré qu'il existe un phénomène de brouillage périodique de la figure d'interférences lorsque l'on fait varier la différence de marche, ici en translatant le miroir mobile (revoir la figure 20 du cours). Si le contraste est initialement maximum, on doit donc observer progressivement une perte de contraste de la figure d'interférences en éloignant le miroir mobile de la séparatrice. Le contraste doit ensuite à nouveau augmenter si on continue à déplacer le miroir mobile dans le même sens (du moins en pratique tant que la longueur de cohérence de la source n'est pas dépassée).

Hidden page

• Nature des franges observées dans le plan de (E)

Les franges d'interférences sont les lieux où $\delta(M) = S_1M - S_2M = \text{cte}$, c'est-à-dire des hyperboloïdes d'axe de révolution (OZ) et de foyers S_1 et S_2 . Dans le plan de l'écran, on observe donc des **franges circulaires de centre O** (appelées communément « anneaux »).

b) • Qu'observe-t-on en O ?

Au point O, on a $\delta(O) = 2e$ d'après (1) avec par hypothèse $2e = p_0 \cdot \lambda$, $p_0 \in \mathbb{N}$. On a donc un maximum d'intensité au centre : **le centre est brillant**.

Il s'agit là d'un cas particulier qu'il convient de ne pas systématiser ! *A priori*, l'ordre au centre $p(O) = \frac{\delta(O)}{\lambda}$ est quelconque.

• Ordre d'interférence p de l'anneau brillant de numéro m

Par définition, l'ordre d'interférence au point M s'écrit ici :

$$p(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda} = \frac{2e}{\lambda} \left[1 - \frac{X^2}{2(D+d)^2} \right].$$

On remarque que $p(X=0) = \frac{2e}{\lambda} = p_0$ est un entier, ce qui signifie que le centre de la figure d'interférences est brillant. L'anneau brillant numéro m a donc pour rayon X_m et pour ordre :

$$p = \frac{2e}{\lambda} \left[1 - \frac{X_m^2}{2(D+d)^2} \right] \text{ et avec : } \boxed{p = p_0 - m}$$

• Rayon X_m de l'anneau de numéro m

On en déduit l'égalité suivante :

$$p_0 \cdot \left[1 - \frac{X_m^2}{2(D+d)^2} \right] = p_0 - m$$

$$\Rightarrow X_m = (D+d) \cdot \sqrt{\frac{2m}{p_0}} = \boxed{(D+d) \cdot \sqrt{\frac{m \cdot \lambda}{e}}} \quad (2)$$

• Application numérique

L'utilisation de la relation (2) et des données numériques de l'énoncé donne :

m	0	1	2	3	4	5
$X_m(\text{cm})$	0	2,2	3,2	3,9	4,5	5

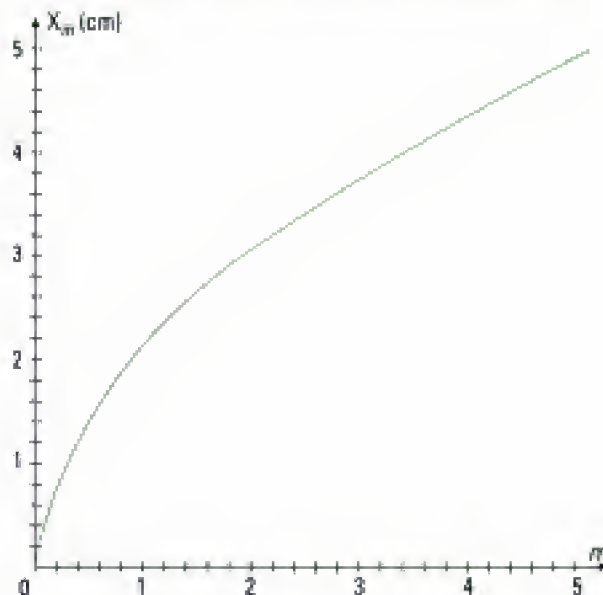


Figure 2

• Comment évolue la distance entre deux anneaux consécutifs ?

La distance entre l'anneau de numéro m et celui de numéro $m + 1$ s'exprime selon :

$$X_{m+1} - X_m = (D + d) \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{e}} \cdot (\sqrt{m+1} - \sqrt{m}).$$

Cette quantité est une fonction décroissante de m , ainsi l'écart entre deux anneaux consécutifs diminue lorsque le numéro m augmente (ce que montre la figure 2).

2) a) Pour déterminer les coordonnées de S_1 et S_2 dans (OXYZ), reprenons la figure 4 de l'énoncé de l'exercice 3 :

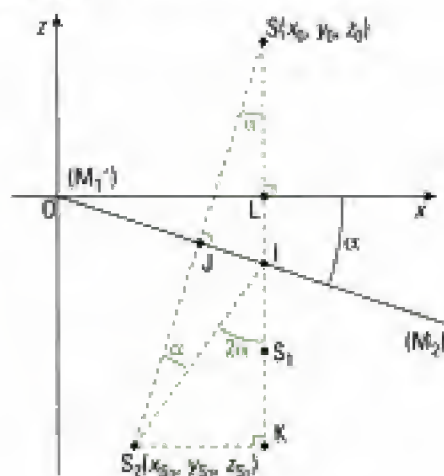


Figure 3

Les coordonnées de S_1 se déduisent rapidement en remarquant que S_1 est symétrique de S par rapport au plan (OXY). Donc :

$$\begin{aligned} x_{S_1} &= x_0 \\ y_{S_1} &= y_0 \\ z_{S_1} &= -z_0 \end{aligned}$$

Il reste à déterminer les coordonnées de S_2 à l'aide de la figure 3 ci-contre.

(OI) étant la médiatrice de $[SS_2]$, on a :

$$IS = IS_2 \text{ et } JS = JS_2.$$

On en déduit que $(\widehat{JS_2I}) = (\widehat{JSI}) = \alpha$, puis :

$$(\widehat{S_2IK}) = \pi - (\widehat{SIS_2}) = \pi - (\pi - 2\alpha) = 2\alpha.$$

Ainsi, il vient :

$$\begin{aligned} S_2K &= S_2I \cdot \sin(2\alpha) = SI \cdot \sin(2\alpha) \text{ où } SI = SL + LI = z_0 + x_0 \tan \alpha \\ &\Rightarrow S_2K = (z_0 + x_0 \cdot \tan \alpha) \cdot \sin(2\alpha) \end{aligned}$$

α étant petit, on écrit :

$$S_2K \approx (z_0 + x_0 \cdot \alpha) \cdot 2\alpha \approx 2z_0 \cdot \alpha \text{ à l'ordre 1 en } \alpha$$

et

$$x_{S_2} = x_0 - S_2K = x_0 - 2z_0 \cdot \alpha.$$

S , S_1 et S_2 étant dans le plan (OXZ), on a immédiatement :

$$y_{S_2} = y_0.$$

Enfin, on a :

$$-z_{S_2} = LI + IK = x_0 \cdot \tan \alpha + S_2I \cdot \cos(2\alpha) \text{ avec } S_2I = SI \approx z_0 + x_0 \cdot \alpha$$

soit :

$$-z_{S_2} = x_0 \cdot \alpha + (z_0 + x_0 \cdot \alpha) \times 1 = z_0 + 2x_0 \cdot \alpha$$

$$\Rightarrow z_{S_2} = -z_0 - 2x_0 \cdot \alpha.$$

b) Remarquons qu'avec les conventions d'orientation choisies en figure 4 de l'énoncé (exercice 3), la quantité $S_2M - S_1M$ est ici positive. Avec :

$$S_1M = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z + z_0)^2} = (z + z_0) \cdot \left[1 + \frac{(x - x_0)^2}{(z + z_0)^2} + \frac{(y - y_0)^2}{(z + z_0)^2} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Ayant x , x_0 , y et y_0 très inférieurs à $(z + z_0)$, il vient à l'ordre 2 :

$$S_1M \approx (z + z_0) \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{(x - x_0)^2}{(z + z_0)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(y - y_0)^2}{(z + z_0)^2} \right].$$

Par ailleurs, on a :

$$S_2M = \sqrt{(x - x_0 + 2z_0 \cdot \alpha)^2 + (y - y_0)^2 + (z + z_0 + 2x_0 \cdot \alpha)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= (z + z_0) \cdot \left[\frac{(x - x_0 + 2z_0 \cdot \alpha)^2}{(z + z_0)^2} + \frac{(y - y_0)^2}{(z + z_0)^2} + \left(1 + \frac{2x_0 \cdot \alpha}{z + z_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= (z + z_0) \cdot \left[1 + \frac{4x_0^2 \cdot \alpha^2}{(z + z_0)^2} + \frac{4x_0 \cdot \alpha}{z + z_0} + \frac{(x - x_0)^2}{(z + z_0)^2} + \frac{4z_0^2 \cdot \alpha^2}{(z + z_0)^2} + \frac{4z_0 \cdot \alpha \cdot (x - x_0)}{(z + z_0)^2} + \frac{(y - y_0)^2}{(z + z_0)^2} \right]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

On effectue également un développement limité à l'ordre 2, ce qui conduit à :

$$\begin{aligned}
S_2 M \approx (z + z_0) \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4x_0^2 \cdot \alpha^2}{(z + z_0)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4x_0 \cdot \alpha}{z + z_0} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(x - x_0)^2}{(z + z_0)^2} \right. \\
\left. + \frac{1}{2} \cdot \frac{4z_0^2 \cdot \alpha^2}{(z + z_0)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4z_0 \cdot \alpha \cdot (x - x_0)}{(z + z_0)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(y - y_0)^2}{(z + z_0)^2} - \frac{1}{8} \left(\frac{4x_0 \cdot \alpha}{z + z_0} \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\delta(M) = S_2 M - S_1 M = (z + z_0) \cdot \left[\frac{2x_0 \cdot \alpha}{z + z_0} + \frac{2 \cdot z_0^2 \cdot \alpha^2}{(z + z_0)^2} + \frac{2z_0 \cdot \alpha \cdot (x - x_0)}{(z + z_0)^2} \right].$$

Mais l'angle α étant petit par hypothèse, le terme $\frac{2z_0^2 \cdot \alpha^2}{(z + z_0)^2}$ est d'ordre 4 tandis que les deux autres termes sont d'ordre 2 ; on peut donc le négliger (l'énoncé indique plus simplement de négliger les termes en α d'ordre supérieur ou égal à 2).

La différence de marche s'écrit donc à l'ordre 2 :

$$\delta(M) = \frac{2x_0 \cdot \alpha \cdot (z + z_0)}{z + z_0} + \frac{2z_0 \cdot \alpha \cdot (x - x_0)}{z + z_0}$$

soit :

$$\boxed{\delta(M) = \frac{2\alpha \cdot (x_0 \cdot z + x \cdot z_0)}{z + z_0}} \quad (3)$$

c) * Allure des franges d'interférences sur l'écran (E)

L'énoncé indique que (E) est parallèle à M_1' . Ainsi, z est constant pour tout point M de l'écran (voir la figure 4 de l'énoncé de l'exercice 3).

Les franges étant par ailleurs définies par l'équation $\delta(M) = \text{cte}$, la relation (3) montre que dans ces conditions, on a :

$$x = \text{cte}.$$

Les franges sont donc ici **rectilignes et dirigées selon (OY)**.

* Détermination de l'interfrange i

Appliquons la méthode n° 3 du chapitre 2 :

$$i = \frac{\lambda}{d\delta/dx}, \text{ avec ici } \delta \text{ qui ne dépend que de la coordonnée } x.$$

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{2\alpha \cdot z_0}{z + z_0}, \text{ donc :}$$

$$\boxed{i = \frac{\lambda \cdot (z + z_0)}{2\alpha \cdot z_0}}$$

* Position de la frange centrale

Elle correspond à un ordre d'interférence nul, c'est-à-dire à une différence de marche nulle. On résout donc :

$$\delta(M) = 0 \Rightarrow x_0 \cdot z + x_c \cdot z_0 = 0, \text{ soit : } \boxed{x_c = -\frac{x_0 \cdot z}{z_0}}$$

Hidden page

Interférences localisées à deux ondes : interféromètre de Michelson

Introduction

Dans le développement du cours, nous n'avons étudié jusqu'ici que des interféromètres en situation de division de front d'onde, quasiment tous éclairés par une source ponctuelle, dans des conditions d'utilisation ne posant pas de problèmes de cohérence spatiale. Dans ce cas, les interférences observées manquent de luminosité. Aussi est-il naturel de penser à augmenter le nombre de points sources en utilisant une source étendue. Nous avons déjà vu les conséquences de ce choix pour ce qui concerne l'interféromètre de Young : le phénomène d'interférences se brouille rapidement. Comment faire alors pour obtenir des figures d'interférences lumineuses en utilisant une source étendue ? L'interféromètre de Michelson, en situation de diviseur d'amplitude, répond à cette interrogation.

Plan du chapitre 5

A. L'interféromètre de Michelson utilisé comme un diviseur d'amplitude.	182
B. Utilisation de l'interféromètre de Michelson.	195
C. Conclusion.	203
<i>Méthodes</i>	
L'essentiel ; mise en œuvre	204
<i>Énoncés des exercices</i>	208
<i>Indications</i>	212
<i>Solutions des exercices</i>	213

A. L'interféromètre de Michelson utilisé comme un diviseur d'amplitude

Nous avons vu que l'interféromètre de Young donne des interférences non localisées et contrastées si la fente source est très fine. La question que nous nous posons maintenant est la suivante: lorsqu'un interféromètre est éclairé par une source étendue, existe-t-il des zones de l'espace où les ondes interfèrent, pour lesquelles la variation de la différence des chemins optiques $\Delta\delta(M)$ due aux différents points de la source est nulle? S'il en est ainsi, en ces zones, qui sont généralement des surfaces, chaque point source crée le même état interférentiel: les franges d'interférences y sont visibles et très lumineuses puisque chaque point source apporte sa contribution.

Pour répondre à cette question, considérons un système optique Σ à deux voies ① et ② tel qu'un interféromètre (figure 1) éclairé par une source ponctuelle S dont les ondes transitant par les voies ① et ② interfèrent en M . Supposons maintenant que la source de lumière est étendue et incohérente, c'est-à-dire formée d'autres points sources, comme S' , supposés indépendants, qui contribuent à l'éclairement du point M en ajoutant en ce point leurs intensités.

Explicitons la variation de la différence des chemins optiques $\Delta\delta(M)$ correspondant aux trajets (SM) et $(S'M)$. Il vient:

$$\Delta\delta(M) = \delta'(M)_{S'M} - \delta(M)_{SM},$$

$$\text{donc: } \Delta\delta(M) = [(S'M)_{\bullet} - (S'M)_{\circ}] - [(SM)_{\circ} - (SM)_{\bullet}],$$

$$\text{qui s'écrit encore: } \Delta\delta(M) = [(S'M)_{\bullet} - (SM)_{\circ}] - [(S'M)_{\circ} - (SM)_{\bullet}].$$

Or nous avons vu au chapitre 1 que si l'on déplace un point A en A' , le chemin optique (AB) varie de $d(AB) = -n\vec{e} \cdot \vec{AA'}$. Nous avons donc ici, en limitant le développement au premier ordre:

$$(S'M)_{\bullet} - (SM)_{\circ} = -n\vec{e}_1 \cdot \vec{SS'} \quad \text{et} \quad (S'M)_{\circ} - (SM)_{\bullet} = -n\vec{e}_2 \cdot \vec{SS'}.$$

Ainsi:

$$\Delta\delta(M) = n(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) \cdot \vec{SS'}.$$

Si des points particuliers du champ d'interférences vérifient la condition cherchée $\Delta\delta(M) = 0$, alors il faut que:

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_2.$$

• Cas d'un interféromètre à division de front d'onde

Dans le dispositif de Young par exemple, la lumière issue des points S et S' précédents doit passer par les deux trous S_1 et S_2 . En conséquence, $\vec{e}_1 \neq \vec{e}_2$. De tels points particuliers du champ d'interférences n'existent pas. Ceci confirme la non-localisation des interférences.

• Cas d'un interféromètre à division d'amplitude

La lame semi-transparente, appelée séparatrice, partage une onde incidente, associée à un même rayon incident, en deux ondes ou rayons: l'un transmis, l'autre réfléchi. La nature de l'onde n'est pas affectée (de plane à plane, de sphérique à sphérique) mais son amplitude est changée.

Un même rayon incident peut donc donner un rayon réfléchi et un rayon transmis, qui vont suivre chacun un des bras de l'interféromètre: dans ce cas, $\vec{e}_1 = \vec{e}_2$ et donc $\Delta\delta(M) = n(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) \cdot \vec{SS'} = 0$, quels que soient le point source et le rayon incident considérés.

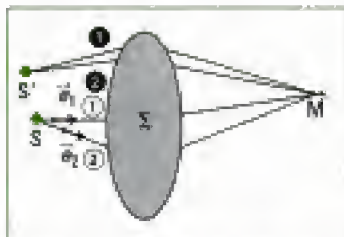


Fig. 1 – Interféromètre à deux bras (ou voies) éclairé par une source étendue. \vec{e}_1 et \vec{e}_2 sont des vecteurs unitaires portés par les rayons issus de S .

1. Nous ne considérons pas le cas où $\vec{SS'}$ est perpendiculaire à $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, qui donne aussi $\Delta\delta(M) = 0$. Ce cas, déjà rencontré, correspond à une extension de la source dans une direction perpendiculaire, ce qui génère une fente très fine dans cette direction. Comme indiqué au paragraphe B.2.6 du chapitre 3, les franges d'interférences ont alors une meilleure luminosité.

Propriété 1

Dans un interféromètre à division d'amplitude, la source peut être étendue : les franges d'interférences sont lumineuses et contrastées mais localisées sur un ensemble de points, chacun d'eux correspondant à l'intersection de rayons émergents de l'interféromètre et issus d'un même rayon incident.

1. En effet, il existe plusieurs cas de division d'amplitude. Dans le cas de l'interféromètre de Michelson, un rayon incident se partage en deux rayons dont on suit le cheminement jusqu'à leur rencontre et donc leur interférence.

En revanche, dans l'interféromètre de Perot-Fabry, un rayon incident se partage en un grand nombre de rayons qui vont ensuite interférer (cf. exercice 7).

2. Les résultats obtenus avec cette supposition ne sont pas remis en cause par une considération de source volumique (cas des gaz par exemple).

Nous admettrons le résultat, qui sera vérifié expérimentalement dans les deux paragraphes suivants, selon lequel les interférences sont alors *localisées* sur la surface lieu d'intersection de chacun de ces couples de rayons¹ émergents de l'interféromètre, pour l'ensemble des rayons incidents sur la séparatrice.

Dans l'étude qui suit :

- l'interféromètre de Michelson est considéré comme idéal (figure 2) :
 - la séparatrice (S_p), supposée d'épaisseur nulle, divise le faisceau qu'elle reçoit en deux parties d'intensités égales, l'une transmise, l'autre réfléchie, et ce à chaque traversée de la séparatrice ; les éventuels déphasages à la réflexion sont compensés par un dispositif non représenté ;
 - les miroirs (M_1) et (M_2) sont parfaitement plans et réfléchissants ;
 - la source qui éclaire l'interféromètre est supposée monochromatique, étendue, incohérente et plane².
- l'écran (E) est supposé parallèle au miroir « fixe » (M_1).

A.1. Interféromètre de Michelson réglé en lame d'air à faces parallèles et éclairé par une source étendue

A.1.1 – Montage expérimental et résultats

Le montage est le suivant :

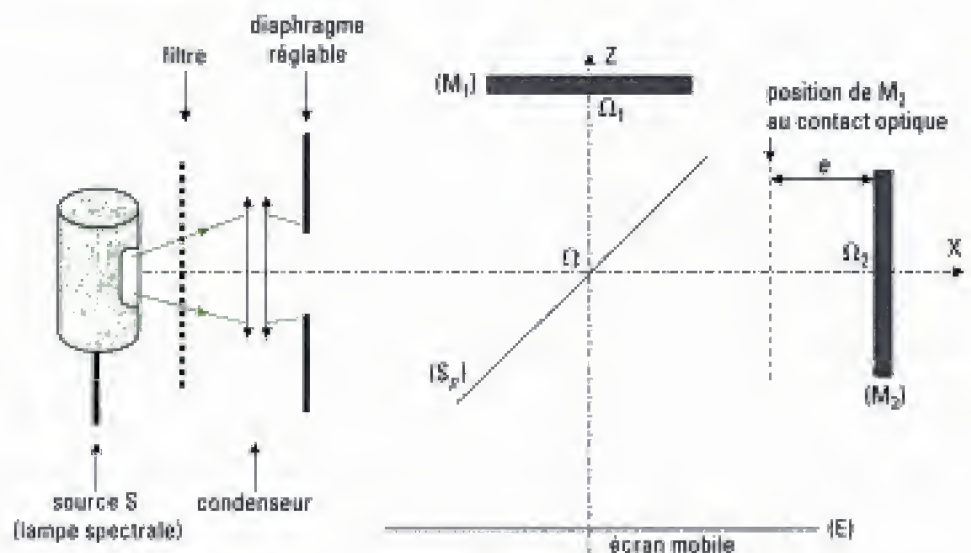


Fig. 2 – Interféromètre de Michelson réglé en lame d'air à faces parallèles d'épaisseur e , éclairé par une source étendue à distance finie.

Le filtrage de la lumière émise par la lampe spectrale permet de considérer la lumière reçue par l'interféromètre comme monochromatique.

Nous ouvrons progressivement le diaphragme.

• Cas où la source est ponctuelle

Nous plaçons un écran (E), mobile dans la direction ΩZ (figure 2), au plus près des faisceaux émergents de la séparatrice (cette distance est de l'ordre de 20 cm).

Nous observons sur cet écran des franges annulaires ou anneaux peu lumineux. Si nous écartons l'écran de l'interféromètre, nous observons encore des anneaux, de plus grands diamètres, moins lumineux que les précédents.

Comme vu au chapitre 4 (paragraphe C), nous observons alors les intersections des hyperboloïdes de révolution avec l'écran.

La diminution de l'intensité lumineuse, sur toute la zone de l'écran montrant les anneaux, est due au fait que l'énergie lumineuse qui sort de l'interféromètre se répartit sur une surface plus grande lorsque l'on éloigne l'écran¹.

• Cas où la source est étendue

Si nous ouvrons un peu le diaphragme, le contraste des anneaux diminue au voisinage de l'interféromètre. Si nous éloignons l'écran, les anneaux retrouvent le contraste qu'ils avaient avec la source ponctuelle pour cette position.

Plus nous ouvrons le diaphragme, plus il faut éloigner l'écran de l'interféromètre pour observer les anneaux.

• Cas où la source est très étendue

Si nous ouvrons encore le diaphragme, les anneaux se situent très loin de l'interféromètre. Aussi, pour les observer, nous introduisons une lentille de projection à la sortie de l'interféromètre. Nous plaçons l'écran d'observation dans le plan focal de cette lentille. Nous observons alors sur l'écran des anneaux lumineux à fort contraste.

Dans le cas de l'interféromètre de Michelson réglé en lame d'air à faces parallèles et éclairé par une source étendue, les figures d'interférences nettes, lumineuses et à fort contraste sont des anneaux localisés sur une surface à l'infini. Les interférences sont donc *localisées* à l'infini.

A.1.2 – Montage en lame d'air à faces parallèles, schéma équivalent

Comment faire pour que les deux rayons qui interfèrent à l'infini soient issus d'un même rayon incident? La solution passe par la division d'amplitude que permet l'interféromètre de Michelson.

• Montage, schéma et parcours d'un rayon incident

Le parcours d'un rayon incident, qui se sépare en deux au point J, est donné en figure 3. Ce tracé utilise les propriétés de symétrie du dispositif, comme au chapitre 4.

• Schéma et parcours équivalents

Comme nous l'avons montré au chapitre 4, par pliage le schéma réel admet un équivalent plus simple (figure 4) qui ne prend pas en compte la séparatrice.

¹ Le rayon des anneaux est en effet proportionnel à \sqrt{D} (cf. chapitre 3 paragraphe A.2.6.), où D est la distance entre l'écran et le milieu de S, S_1 (sources secondaires images de S).

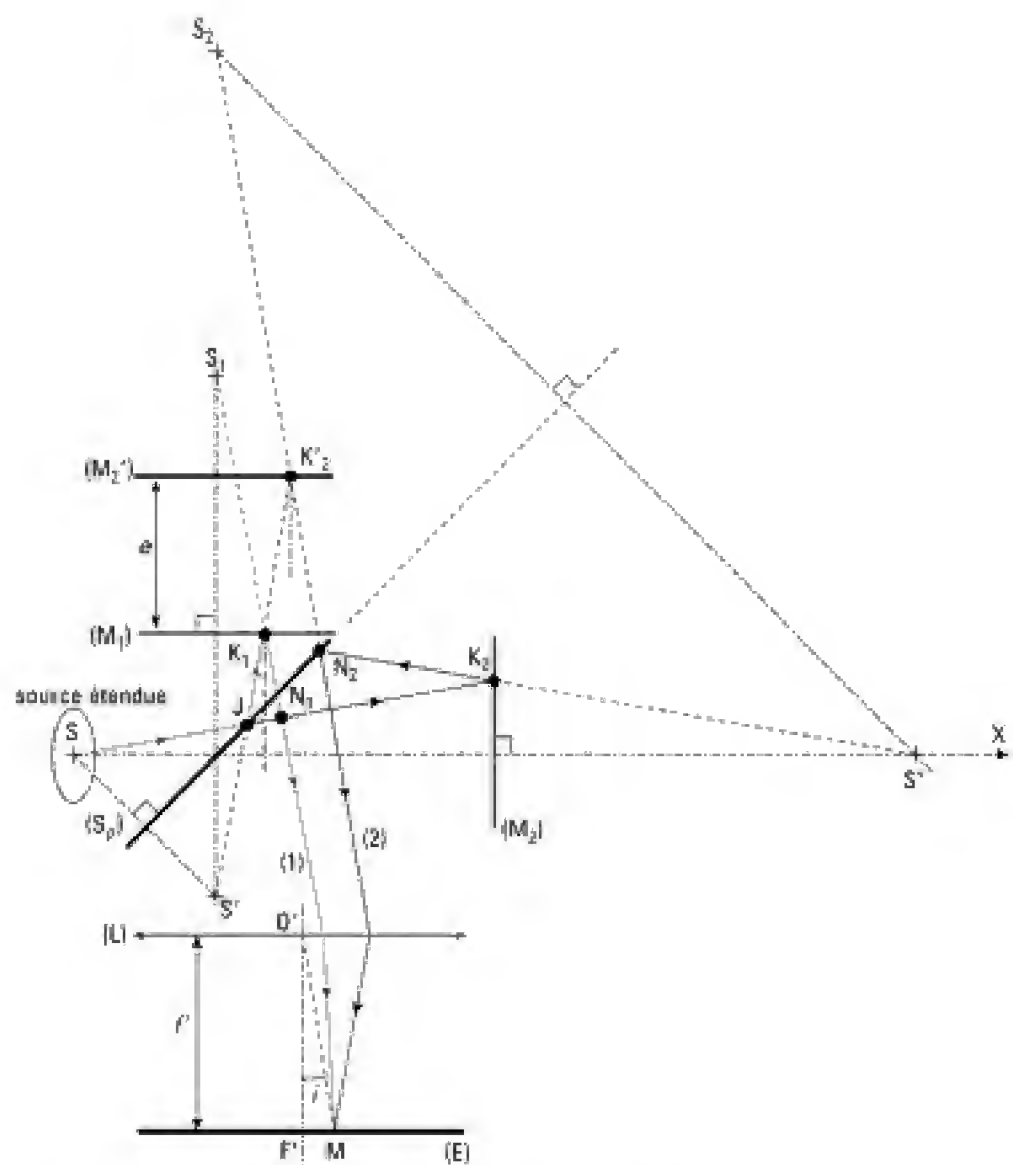


Fig. 3 – Cas d'une lame d'air à faces parallèles d'épaisseur e : tracé réel du parcours d'un rayon incident issu d'une source étendue, qui donne par division d'amplitude deux rayons émergents (1) et (2).

A.1.3 – Surface de localisation

Les deux rayons issus de la source S et qui interfèrent sur la surface de localisation sont issus d'un seul et même rayon incident.

Or, par construction géométrique (figure 4), un rayon incident donne deux rayons émergents (1) et (2) *parallèles*, qui se coupent à l'infini. La surface de localisation est donc située à l'infini.

A.1.4 – Expression de la différence de marche en un point M de l'écran d'observation

Sur la figure 5, qui reprend une partie de la figure 4, la droite KH perpendiculaire aux rayons lumineux (1) et (2) qui émergent de la lame est la trace d'une surface d'onde. Selon le théorème de Malus, les trajets optiques depuis les points H ou K jusqu'au point M sont égaux. En conséquence :

$$\delta(M) = (K_1K_2K) - (K_1H) = K_1K_2K - K_1H$$

puisque par hypothèse l'indice de l'air est égal à 1.

Hidden page

Vu la symétrie, $K_1 K_2' K = 2 K_1 K_2'$.

Or, $K_1 K_2' = \frac{e}{\cos(i)}$ et $K_1 H = K_1 K \sin(i)$ avec $K_1 K = 2 K_1 N = 2 e \tan(i)$.

Ainsi, $\delta(M) = \frac{2e}{\cos(i)} - 2e \tan(i) \sin(i) = \frac{2e}{\cos(i)} (1 - \sin^2(i)) = 2e \cos(i)$.

Nous retiendrons :

$$\delta(M) = 2e \cos(i).$$

Cette différence de marche, dans le cas d'une lame à faces parallèles d'épaisseur e et d'indice n , s'écrit sous la forme :

$$\delta(M) = 2ne \cos(r).$$

avec $\sin(i) = n \sin(r)$, r étant l'angle de réfraction correspondant à l'angle d'incidence i sur le miroir (M_1).

A.1.5 – Cohérence spatiale

Pour les points M de la surface de localisation à l'infini, la différence de marche $\delta(M) = 2e \cos(i)$ dépend du point M considéré par l'intermédiaire de l'angle i , mais pas du point source.

L'interféromètre de Michelson étant réglé en lame d'air à faces parallèles, dans le cas de l'observation à l'infini, une source étendue permet d'obtenir des figures d'interférences lumineuses et contrastées. **La cohérence spatiale est assurée pour tous les points de la source.**

A.1.6 – Expression de l'intensité lumineuse sur l'écran : lieu des points de même état d'interférence

• Intensité lumineuse

Si l'intensité du faisceau incident est I_0 , celle de chaque faisceau émergent est $\frac{I_0}{4}$. L'intensité lumineuse sur l'écran s'écrit donc :

$$\begin{aligned} I(M) &= 2 \frac{I_0}{4} [1 + \cos(\Delta\phi(M))] \\ &= \frac{I_0}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{4\pi e \cos(i)}{\lambda_0}\right) \right]. \end{aligned}$$

Tout rayon émis par un point de la source et arrivant sur la lame avec l'angle i contribue à cette intensité. Ces points voisins étant incohérents, les intensités lumineuses s'ajoutent et le phénomène observé est nettement plus lumineux qu'avec une source ponctuelle.

• Lieux de même état d'interférence

Les lieux de même état d'interférence, donc de même intensité, sont des lieux tels que l'angle i soit constant.

Ceci correspond sur l'écran à des anneaux qui ont même axe que la lentille de projection.

Ces franges étant caractérisées par un angle i donné, elles sont appelées franges d'égale inclinaison ou encore « anneaux d'Haidinger ».

A.1.7 – Ordre d'interférence en un point de la surface de localisation des interférences

L'ordre d'interférence en un point M de l'écran, vu sous un angle i depuis le centre O' de la lentille (figure 4), est :

$$p(M) = \frac{2e}{\lambda_0} \cos(i).$$

L'épaisseur e étant supposée constante :

– l'ordre d'interférence est maximal au centre lorsque $i = 0$ et a pour valeur¹ :

$$p_0 = \frac{2e}{\lambda_0}.$$

– l'ordre d'interférence diminue quand M s'écarte du centre.

A.1.8 – Apparition ou disparition d'anneaux au centre de la figure d'interférences en fonction de l'épaisseur e

Si nous déplaçons le miroir mobile (M_2) par translation dans la direction (SX) (figures 2 et 3), l'épaisseur e varie. Un anneau donné correspond à une valeur de l'ordre p donnée. Lors de la translation, pour cet anneau, l'ordre

d'interférence $p(M) = \frac{2e}{\lambda_0} \cos(i)$ doit rester constant. Par conséquent :

• Si l'épaisseur e augmente, $\cos(i)$ doit diminuer, donc l'angle i doit augmenter. Dans ce cas le rayon de l'anneau augmente. On dit que les anneaux « sortent » du centre.

• Réciproquement, si l'épaisseur e diminue, le rayon d'un même anneau diminue : on dit que les anneaux « rentrent » au centre.

• À chaque apparition ou disparition d'un anneau sous l'influence de la variation de l'épaisseur e de la lame d'air, l'ordre d'interférence au centre, où $i = 0$, varie de une unité. Il faut pour cela que dans le même temps l'épaisseur

de la lame varie de $\frac{\lambda_0}{2}$ puisque $\Delta p = 1 = 2 \frac{\Delta e}{\lambda_0}$. Il y a donc dans cette remar-

que une possibilité de mesurer une longueur d'onde en comptant le nombre d'anneaux apparus (ou disparus) pour une variation d'épaisseur Δe mesurée².

A.1.9 – Rayons des anneaux

La lentille de projection travaillant dans les conditions de Gauss, l'angle i est petit et l'on peut utiliser un développement limité de la fonction $\cos(i)$.

L'ordre d'interférence s'écrit donc, à l'ordre le plus bas non nul en i :

$$p(M) = \frac{2e}{\lambda_0} \cos(i) \approx \frac{2e}{\lambda_0} \left(1 - \frac{i^2}{2}\right).$$

Dans le plan focal de la lentille, le rayon ρ_p de l'anneau d'ordre p donné est $\rho_p \approx f' i_p$ (figure 4). Faisons apparaître l'ordre p_0 au centre dans $p(M)$:

$$p(M) = p_0 - \frac{p_0 i_p^2}{2} \Leftrightarrow i_p = \sqrt{\frac{2(p_0 - p(M))}{p_0}}.$$

Supposons que l'ordre au centre soit un entier ou un demi-entier et cherchons le rayon de l'anneau de même état d'interférence dont le numéro est K. Nous avons donc $p_0 - p(M) = K$. Le rayon de cet anneau s'écrit donc :

$$\rho_K \approx f' \sqrt{\frac{2K}{p_0}}.$$

1. Ce nombre n'est pas nécessairement un entier ou un demi-entier (cf. exercice 9 du chapitre 4).

2. Pour que ce soit possible, le déplacement du miroir mobile doit cependant être comparé à la longueur de cohérence temporelle de la source utilisée.

A.1.10 – Condition d'éclairage

Dans le cas de l'observation des interférences dues à une lame d'air à faces parallèles éclairée par une source étendue, pour observer le plus grand nombre d'anneaux, il faut que les angles i soient variés.

En pratique, il faut donc éclairer les miroirs en lumière convergente, au plus près d'eux¹.

A.1.11 – Contact optique

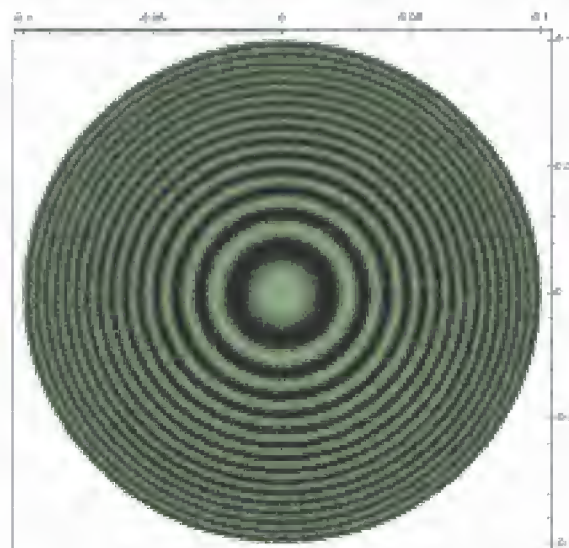
Lorsque $e = 0$, soit au contact optique, nous avons $p_0 = 0$; les rayons des anneaux sont infinis. L'écran est alors éclairé uniformément: on dit dans ce cas que *la teinte est plate*².

1. D'où la nécessité d'un verre anticalorique à l'entrée de l'interféromètre.

2. (M_1) et (M_2) sont alors à égale distance de Ω (figure 2). Seuls (M_1) et (M'_2) sont confondus.

Application 1 Détermination d'un ordre au centre et d'une épaisseur de lame d'air à faces parallèles

Sur la simulation ci-dessous, où les axes sont gradués en mètres, on donne l'aspect des anneaux obtenus dans le plan focal d'une lentille convergente de 1 m de distance focale, dans les conditions expérimentales du paragraphe A.1. Le centre est brillant et la longueur d'onde de la lumière utilisée est $\lambda_0 = 560$ nm. En déduire l'ordre au centre et l'épaisseur de la lame d'air.



Solution

Le centre est brillant. Nous prévoyons un ordre entier au centre.

Nous choisissons de déterminer le rayon du troisième anneau clair en mesurant son diamètre. En utilisant les échelles données en abscisse et ordonnée nous obtenons:

$$\rho_{K=3} = 4,5 \text{ cm},$$

ce qui nous permet de trouver l'ordre au centre: $p_0 = \frac{2Kf^2}{\rho_K^2}$, soit $p_0 = 2962$.

L'ordre théorique calculé à partir des données de la simulation était 3000. L'écart est dû aux imprécisions de cette méthode, la reproduction étant ici réduite. L'épaisseur est alors:

$$e = p_0 \frac{\lambda}{2} = 0,83 \text{ mm}.$$

Elle est compatible avec les épaisseurs mesurables sur l'appareil réel.

A.2. Interféromètre de Michelson réglé en coin d'air et éclairé par une source étendue

A.2.1 – Montage expérimental et résultats

Dans le montage de la figure 1, nous réglons d'abord l'interféromètre au contact optique : les miroirs (M_1) et (M_2) sont perpendiculaires et font entre eux un angle nul.

À partir de cette position¹, nous faisons tourner le miroir (M_2) d'un petit angle α autour d'un axe passant par le miroir (M_2) et perpendiculaire au plan de représentation de la figure 2. L'interféromètre est donc réglé en coin d'air.

Nous utilisons comme source une fente de largeur variable éclairée par une source monochromatique. Cette fente, de direction parallèle à l'arête du coin d'air, est placée dans le plan focal d'une lentille convergente.

• Cas où la fente source est très peu ouverte

Nous observons des franges rectilignes peu lumineuses sur l'écran (E) placé loin de l'interféromètre. Si nous rapprochons l'écran de l'interféromètre, nous observons encore des franges rectilignes, de plus petit interfrange², plus lumineuses que les précédentes.

L'interprétation de cette observation est conforme aux résultats du chapitre 4 puisque nous observons alors les intersections des hyperboloïdes de révolution avec l'écran (voir chapitre 4 paragraphe B).

L'augmentation de l'intensité lumineuse, sur toute la zone de l'écran montrant les franges rectilignes, est due au fait que l'énergie lumineuse qui sort de l'interféromètre se répartit sur une surface d'écran plus petite lorsque l'on rapproche l'écran de l'interféromètre.

• Cas où la fente source est ouverte

Si nous ouvrons un peu la fente source, le contraste des franges rectilignes diminue loin de l'interféromètre. Si nous rapprochons l'écran, les franges rectilignes retrouvent le contraste qu'elles avaient avec la fente source très peu ouverte.

Plus nous ouvrons la fente source, plus il faut rapprocher l'écran de l'interféromètre de Michelson pour observer les franges rectilignes nettes et contrastées.

• Cas où la fente source est très large

Si nous ouvrons encore la fente source, les franges se situent très près des miroirs de l'interféromètre, ce qui fait que nous ne pouvons y placer un écran. Aussi, pour observer les interférences, nous introduisons une lentille de projection à la sortie de l'interféromètre, qui donne sur un écran (E) une image nette de cette zone³. Nous plaçons l'écran dans le plan conjugué de la zone observée. Sur l'écran, nous pouvons voir des franges rectilignes lumineuses, à fort contraste.

Dans le cas de l'interféromètre de Michelson réglé en coin d'air et éclairé par une fente source étendue, les figures d'interférences nettes, lumineuses et contrastées sont des franges rectilignes localisées sur une surface très près des miroirs⁴. Les interférences sont donc localisées très près des miroirs.

1. Nous nous assurons ainsi de respecter la condition de cohérence temporelle de la source.

2. L'interfrange est en effet proportionnel à D (cf. chapitre 3 paragraphe A.2.5.), où D est la distance entre l'écran et le milieu de S_1S_2 (sources secondaires images de S).

3. Dans la pratique, on forme sur l'écran d'observation une image nette des bords des miroirs.

4. On peut aussi dire que les interférences sont localisées sur les miroirs car dans le modèle équivalent ils sont sensiblement dans un même plan puisque l'angle qu'ils font entre eux est supposé très petit.

A.2.2 – Montage en coin d'air, schéma équivalent

• Montage, schéma et parcours d'un rayon incident

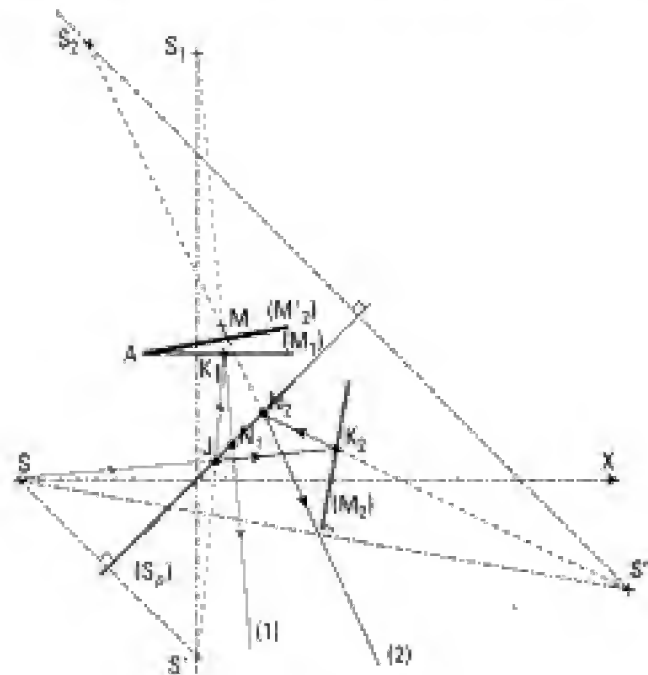


Fig. 6 – Cas d'un coin d'air; tracé réel du parcours d'un rayon incident issu d'une source étendue, qui donne par division d'amplitude deux rayons émergents (1) et (2).

• Schéma et parcours équivalents

Comme nous l'avons montré précédemment, le tracé réel admet un tracé équivalent (figure 7) plus simple qui ne prend pas en compte la séparatrice:

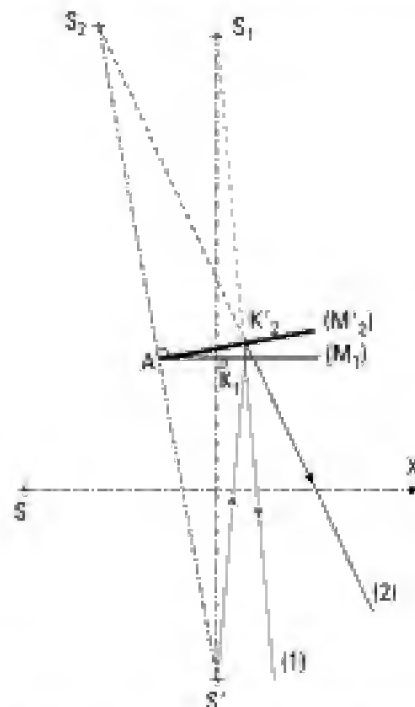


Fig. 7 – Cas d'un coin d'air; tracé équivalent du parcours d'un rayon incident issu d'une source étendue, qui donne par division d'amplitude deux rayons émergents (1) et (2).

A.2.3 – Surface de localisation des interférences

Nous cherchons à situer la zone de localisation sachant :

- que la zone de localisation est formée d'un ensemble de points : chacun d'eux résulte de l'intersection de deux rayons émergents correspondant à un seul rayon incident ;
- que les interférences sont localisées sur les miroirs, ou au voisinage des miroirs, puisque ces points minimisent les variations de différence de marche. L'arête A des miroirs (figure 8), avec une épaisseur de coin nulle, répond toujours à ce critère. La zone de localisation passe donc par ce point A.

Nous verrons que le faisceau de lumière qui éclaire les miroirs, qui font un petit angle entre eux, doit être parallèle ou quasi parallèle. Ceci nous rappelle la situation expérimentale des miroirs de Fresnel (cf. chapitre 3 paragraphe B.1) éclairés en lumière parallèle (cf. exercice 10 du chapitre 3).

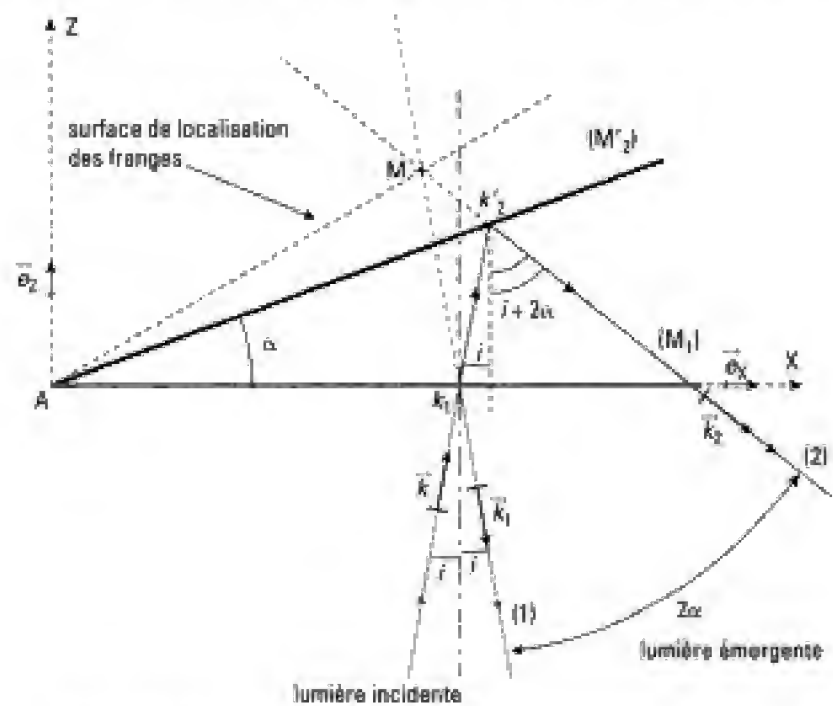


Fig. 8 – Tracé du parcours d'un rayon lumineux arrivant sur le coin d'air : localisation des franges rectilignes.

Soit l'onde plane incidente de vecteur d'onde \vec{k} , qui se réfléchit sur les miroirs (M_1) et (M_2) selon les vecteurs d'onde \vec{k}_1 et \vec{k}_2 (figure 8), avec séparation d'amplitude en K_1 . Lorsque le miroir (M_2) tourne d'un angle de valeur α , le rayon émergent tourne d'un angle 2α . Dans le repère (AXZ) , évaluons la différence de marche $\delta(M)$ entre les rayons émergents (1) et (2) issus d'un même rayon incident et qui se croisent en un point M de coordonnées (X, Z) du champ d'interférences :

$$\delta(M) = \frac{\lambda_0}{2\pi} \Delta\varphi(M) = \frac{\lambda_0}{2\pi} (\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{AM}$$

1. Le point A sert d'origine et les ondes sont planes. On a donc :
 $\varphi_1(M) - \varphi(A) = \vec{k}_1 \cdot \vec{AM}$
 et $\varphi_2(M) - \varphi(A) = \vec{k}_2 \cdot \vec{AM}$.
 Ainsi, $\Delta\varphi(M) = (\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{AM}$.

avec : $\vec{k}_1 = k_1 \sin(i) \vec{e}_x - k_1 \cos(i) \vec{e}_z$
 et $\vec{k}_2 = k_2 \sin(i + 2\alpha) \vec{e}_x - k_2 \cos(i + 2\alpha) \vec{e}_z$.

Or, les deux ondes se déplacent dans le même milieu, donc $k_1 = k_2 = k$ et :

$$\begin{aligned} \vec{k}_2 - \vec{k}_1 &= k [\sin(i + 2\alpha) - \sin(i)] \vec{e}_x - k [\cos(i + 2\alpha) - \cos(i)] \vec{e}_z \\ &= 2k [\sin(\alpha) \cos(i + \alpha)] \vec{e}_x + 2k [\sin(i + \alpha) \sin(\alpha)] \vec{e}_z \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } (\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{AM} = 2k \sin(\alpha) [X \cos(i + \alpha) + Z \sin(i + \alpha)].$$

La zone de localisation des franges est définie par $\frac{\partial \delta}{\partial i} = 0$ soit ici :

$$-X \sin(i + \alpha) + Z \cos(i + \alpha) = 0.$$

Dans le plan de la figure 8, cette zone est donc une droite d'équation :

$$Z = X \tan(i + \alpha).$$

Nous remarquons que cette droite fait l'angle $(i + \alpha)$ avec le miroir (M_1) de direction AX. Vu la symétrie du problème, la zone de localisation est en fait un plan, dont la trace dans le plan de figure est la droite : $Z = X \tan(i + \alpha)$.

Pour un faisceau parallèle d'angle d'incidence i , le plan de localisation des franges rectilignes du coin d'air se trouve écarté d'un angle i des miroirs¹.

1. L'angle entre les miroirs étant très faible, en éclairage quasi parallèle à l'incidence normale, il y a localisation « sur les miroirs ».

A.2.4 – Différence de marche en un point M où deux rayons interfèrent

Si l'épaisseur e du coin formé par A , (M_1) et (M_2') (figure 8) ne varie pas à l'échelle de quelques longueurs d'onde en se déplaçant le long des miroirs, comme l'épaisseur du coin est faible et que l'angle α est faible, alors nous avons localement une lame quasi parallèle et nous pouvons utiliser pour la différence de marche le résultat établi au paragraphe A.1.4. qui donne ici :

$$\delta(M) \approx 2e \cos(i).$$

e est l'épaisseur locale du coin d'air lors de sa traversée par le rayon lumineux ; i est l'angle d'incidence du rayon par rapport à la normale au coin.

A.2.5 – Expression de l'intensité lumineuse sur le plan de localisation : lieu des points de même état d'interférence

• Intensité lumineuse

L'intensité lumineuse sur l'écran s'écrit encore :

$$I(M) = 2 \frac{I_0}{4} [1 + \cos(\Delta\varphi(M))] = \frac{I_0}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{4\pi e \cos(i)}{\lambda_0}\right) \right]^2.$$

Nous savons que l'épaisseur e du coin d'air dépend de l'abscisse X de chaque point M du champ d'interférences, deux franges consécutives de même état d'interférence étant séparées par une distance dX. Nous avons donc, en différenciant $\delta(M)$ à i constant :

$$d(\delta(M)) = 2d[e \cos(i)] = \lambda_0.$$

Si la lame a la forme d'un prisme, ce qui est souvent le cas, alors $e = \alpha X$ et donc $de = \alpha dX$. Il vient :

$$dX = \frac{\lambda_0}{2\alpha \cos(i)}$$

ce qui définit aussi la période des franges rectilignes sur le coin d'air ou interfrange i_c . Nous avons donc :

$$i_c = \frac{\lambda_0}{2\alpha \cos(i)}.$$

L'interfrange dépend de l'angle d'incidence du faisceau de lumière parallèle arrivant sur le coin et la mesure de i n'est pas aisée. Aussi, nous travaillerons toujours au voisinage de l'incidence normale.

2. Conformément à une convention d'écriture indiquée dans le début de l'ouvrage, nous n'ajoutons pas systématiquement un terme de déphasage dit « supplémentaire » et laissons au lecteur le soin de l'ajouter, que ce déphasage soit prévisible théoriquement (réflexion sur un miroir par exemple) ou qu'il soit observé expérimentalement.

1. Ceci d'autant plus que l'épaisseur e est grande.

2. La lentille de sortie donnant des miroirs une image conjuguée, un éclairage en lumière parallèle conduit souvent à une image de la source projetée sur l'écran, ce qui gêne les observations. Une lumière quasi parallèle est donc préférable.

3. Dans la pratique, il est difficile d'obtenir le quasi parallélisme du faisceau et une incidence quasi normale. Ainsi, il existe plusieurs systèmes de franges avec des interfranges différents qui se superposent : les franges rectilignes ont donc un contraste inférieur à celui des anneaux d'égale inclinaison.

4. Nous retrouvons ici l'expression de l'interfrange obtenue au chapitre 3 paragraphe A.1. Ceci n'est pas étonnant puisque les conditions physiques sont identiques : seule la réalisation matérielle (type d'interféromètre) est différente.

De plus, des angles d'incidence i trop variés entraînent des différences de chemin optiques $\delta(M)$ très variées, donc des états interférentiels eux-mêmes très variés, avec pour conséquence la perte de netteté des interférences observées sur les miroirs¹.

La solution consiste donc à éclairer les miroirs en *lumière quasi-parallèle, ou parallèle*².

Dans le cas de l'observation des interférences dues à un coin d'air éclairé par une source large, pour observer des franges rectilignes contrastées, il faut que les angles d'incidence i soient voisins et proches de la valeur nulle. En pratique, il faut donc éclairer les miroirs en lumière parallèle ou quasi parallèle, en incidence quasi normale³.

Dans ce cas, l'interfrange devient :

$$i_c = \frac{\lambda_0}{2\alpha} \quad ^4.$$

La différence de marche étant :

$$\delta = 2e = 2\alpha X.$$

• Lieux de même état d'interférence

En incidence normale, ce sont des lieux de points M tels que :

$$\delta(M) = 2e = \text{cte.}$$

L'ensemble des points M de même état d'interférence est donc constitué de franges d'égale épaisseur, parallèles à l'arête du coin d'air. Et, si $e = \alpha X$, nous concluons que :

Les lieux de même état d'interférence, donc de même intensité, sont des lieux tels que l'abscisse X soit constante.

Ceci correspond sur le coin d'air à des franges rectilignes qui ont même direction que l'arête du coin d'air.

Ces franges étant caractérisées par une épaisseur de coin donnée, elles sont appelées franges d'égale épaisseur ou encore « franges de Fizeau ».

A.2.6 – Ordre d'interférence en un point de la surface de localisation des interférences

L'ordre d'interférence en un point M du plan des miroirs est :

$$p(M) = p(X) = \frac{2e(X)}{\lambda_0}.$$

L'ordre d'interférence est nul sur l'arête du coin :

$$\text{si } X = 0, \text{ alors } e(X) = 0 \text{ et } p_0 = 0.$$

L'ordre d'interférence $p(M)$ a le même sens de variation que l'épaisseur e .

A.2.7 – Déplacement des franges d'interférences en fonction de l'épaisseur e

L'interfrange i_c ne dépendant pas de l'épaisseur du coin, si l'on augmente cette épaisseur en déplaçant le miroir mobile (M_2) par translation, l'arête du coin se déplace en translation, ainsi que tout le système de franges.

A.2.8 – Dimension des franges sur l'écran de projection

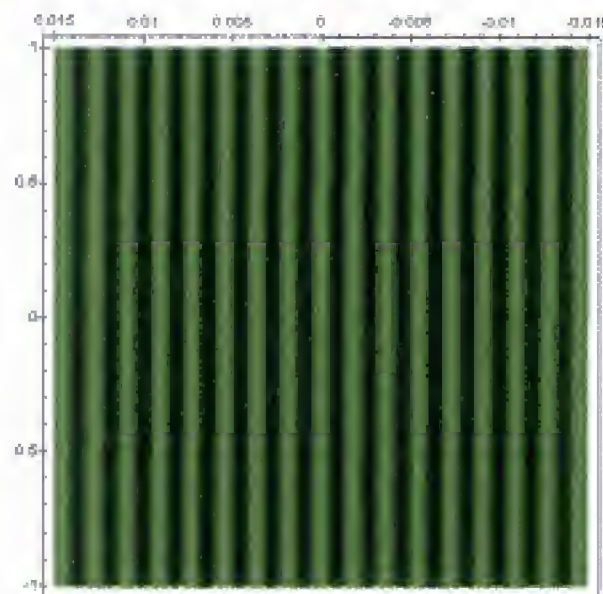
Les franges étant localisées sur les miroirs, on ne peut placer un écran pour les observer. On réalise alors une projection de ces franges sur un écran en utilisant une lentille convergente.

A.2.9 – Cohérence spatiale

Au paragraphe A.2.5, nous avons vu la sensibilité du dispositif à l'angle d'incidence i , et notamment la conséquence sur l'expression de l'interfrange. Ainsi, la cohérence spatiale de ce dispositif est limitée.

Application 2 Détermination de l'angle entre les miroirs formant un coin d'air

L'interféromètre de Michelson étant convenablement réglé, en projection sur un écran on obtient les franges du coin d'air pour la lumière verte du mercure de longueur d'onde $\lambda_0 = 546 \text{ nm}$ (la graduation des échelles est en mètre). La lentille de projection, convergente et de focale 20 cm, est placée à 30 cm du miroir (M_1) et à 60 cm de l'écran. En déduire l'angle des miroirs.



Solution

L'interfrange mesuré sur le document a pour valeur 2 mm. La projection grandit les franges d'un facteur 2, donc l'interfrange sur les miroirs est de 1 mm. Nous en déduisons :

$$\alpha = \frac{\lambda_0}{2i_c} \approx 10^{-4} \text{ rad.}$$

B. Utilisation de l'interféromètre de Michelson

B.1. Description

Dans cette partie, nous présentons sommairement l'interféromètre de Michelson (figure 9), nous donnons une procédure de réglage qui utilise au mieux toutes les considérations théoriques et les remarques pratiques faites à la partie A¹ et enfin nous indiquons quelques mesures possibles avec cet appareil.

¹, il existe en effet plusieurs procédures de réglage. Nous en resterons à celle qui peut être la mieux comprise avec les connaissances du cours.

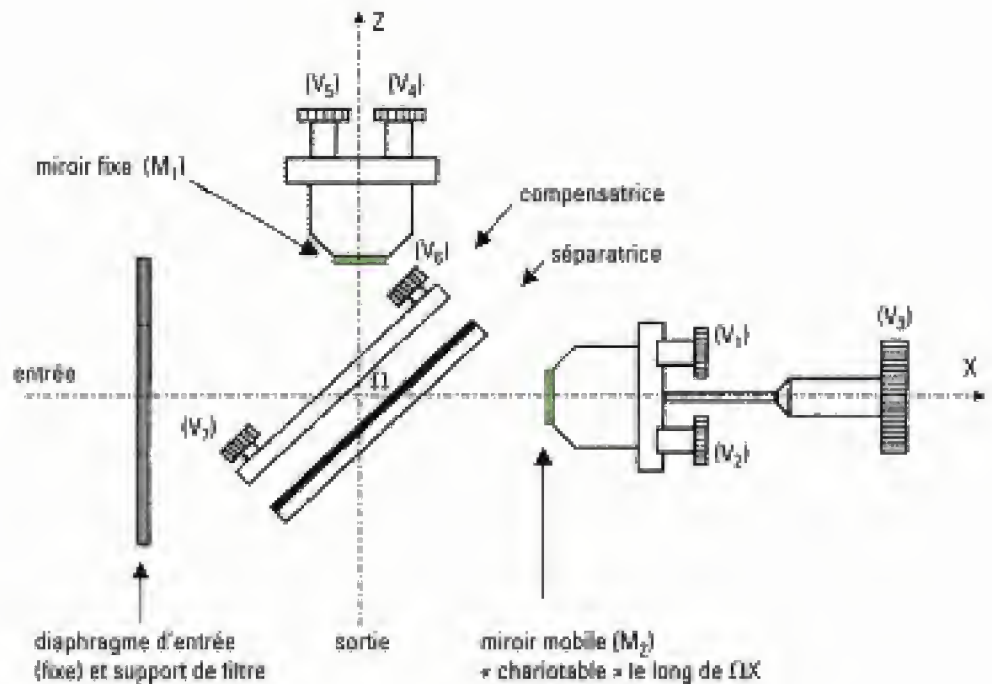


Fig. 9 - Vue d'ensemble de l'interféromètre de Michelson.

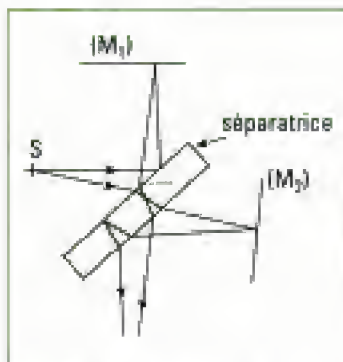


Fig. 10 - Action de la seule séparatrice sur les faisceaux.

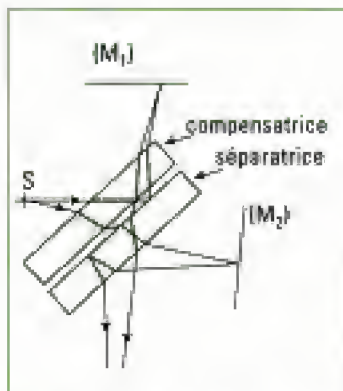


Fig. 11 - Action de la séparatrice et de la compensatrice sur les faisceaux.

À l'aide de la figure 9, nous identifions :

- le diaphragme fixe d'entrée qui peut servir de support pour un filtre interférentiel ou un filtre anticalorique protégeant les miroirs contre une élévation de température due à la source placée à l'entrée de l'appareil ;
- la séparatrice qui est une lame de verre à faces rigoureusement parallèles dont l'une des faces a été traitée afin qu'elle soit semi réfléchissante. Si la séparatrice est seule, les trajets optiques dans le bras 1 et dans le bras 2 ne sont pas symétriques (un des rayons traverse trois fois la lame alors que l'autre ne la traverse qu'une seule fois) (figure 10) ;
- la compensatrice, qui compense cette différence de chemins optiques ; elle est donc taillée dans le même verre, à la même épaisseur que la séparatrice et lui est parallèle (figure 11). La compensatrice est orientable autour d'un axe horizontal (vis V_6) et d'un axe vertical (vis V_7) ;
- les miroirs, en forme de disques, orientés selon un angle voisin de 45° par rapport à la séparatrice. Le miroir (M_2) est mobile en translation selon ΩX en agissant sur la vis (V_3) qui est associée à un vernier gradué habituellement au centième de millimètre. Les vis (V_1) et (V_2) constituent des réglages grossiers et rapides du miroir mobile autour d'un axe horizontal (V_1) et d'un axe vertical (V_2), alors que (V_4) et (V_5) sont des vis de réglages fins du miroir fixe.

B.2. Réglages de l'interféromètre

Le but poursuivi est l'obtention d'une lame d'air à faces parallèles d'épaisseur nulle (contact optique) alors qu'au départ l'épaisseur et l'angle du coin d'air sont importants.

• Première étape : réglages préliminaires

Charioter, c'est-à-dire déplacer le miroir mobile en translation le long de ΩX , de manière à sensiblement égaliser à l'œil les chemins optiques des deux bras. Régler à mi-course les vis (V_1), (V_2), (V_4) et (V_5).

• **Deuxième étape : réglage géométrique de la compensatrice et réglage grossier du parallélisme des miroirs**

Il s'agit de rendre la séparatrice et la compensatrice parallèles. Pour cela, nous superposons les images d'un objet éloigné données par cet ensemble. Dans la pratique, on éclaire l'interféromètre avec le faisceau d'un laser à incidence quasi normale; on observe deux séries de taches dues aux réflexions multiples séparatrice-compensatrice. Agir ensuite sur les vis (V_6) puis (V_7) pour rapprocher au mieux ces deux séries de taches en deux points lumineux afin de régler le parallélisme séparatrice-compensatrice, puis en regroupant ces deux points en un seul (vis (V_1) et vis (V_2)) pour assurer un réglage grossier du parallélisme des miroirs.

• **Troisième étape : amélioration du parallélisme des miroirs**

Élargir le faisceau laser précédent en utilisant une lentille convergente de courte distance focale (5 mm par exemple) afin d'éclairer toute la surface des miroirs.

La source S qui éclaire l'interféromètre est donc ponctuelle: nous sommes dans les conditions d'interférences non localisées du coin d'air¹. Les figures d'interférences sont des hyperboloïdes, dont l'écran en sortie de l'interféromètre donne une trace (voir chapitre 4 paragraphe B). On agit alors sur les vis (V_1) et (V_2) pour faire défiler les figures d'interférence sur l'écran (arcs d'anneaux, anneaux...). Lorsque l'on obtient des anneaux sur l'écran (figure 12), c'est que les miroirs sont quasi parallèles (chapitre 4 paragraphe C). Cependant, l'épaisseur de la lame d'air est encore importante.

1. Car le parallélisme des miroirs n'est pas assuré à ce stade du réglage.



Règlage par rotation du miroir autour d'un axe horizontal



Image obtenue à la fin du réglage du parallélisme.



Règlage par rotation du miroir autour d'un axe vertical

Fig. 12 – Réglages et figure à obtenir à la fin de la troisième étape: les miroirs sont alors quasi parallèles.

• **Quatrième étape : réduction de l'épaisseur de la lame d'air**

Toujours en lumière laser, on place une lentille convergente supplémentaire (environ 10 cm de distance focale) pour faire converger la lumière sur les miroirs. Nous reconnaissons la condition d'éclairage donnée au paragraphe A.1.10. et nous observons donc des anneaux sur l'écran. Rapprochons-nous ensuite d'une épaisseur de lame d'air réduite en chariotant le miroir (M_2) à l'aide de la vis (V_3) de manière à ce que les anneaux rentrent au centre et «grossissent» (cf. paragraphe A.1.8.). Lorsque l'on a dépassé l'épaisseur nulle², les anneaux «sortent» du centre. Dans ce cas, revenir en arrière.

À cet instant, l'épaisseur de la lame d'air est très petite et les miroirs sont quasi parallèles.

2. Attention, l'épaisseur nulle ne peut être repérée qu'en lumière blanche.

Hidden page

B.4. Utilisation de l'interféromètre réglé en lame d'air à faces parallèles : observation des franges annulaires

1. En pratique on éloigne souvent la source de la (ou des) lentille(s).

Changer l'éclairage¹ pour obtenir un faisceau convergent sur les miroirs (figure 17). Placer une lentille de projection (100 cm de focale environ) et observer les anneaux sur l'écran (E) placé dans son plan focal.

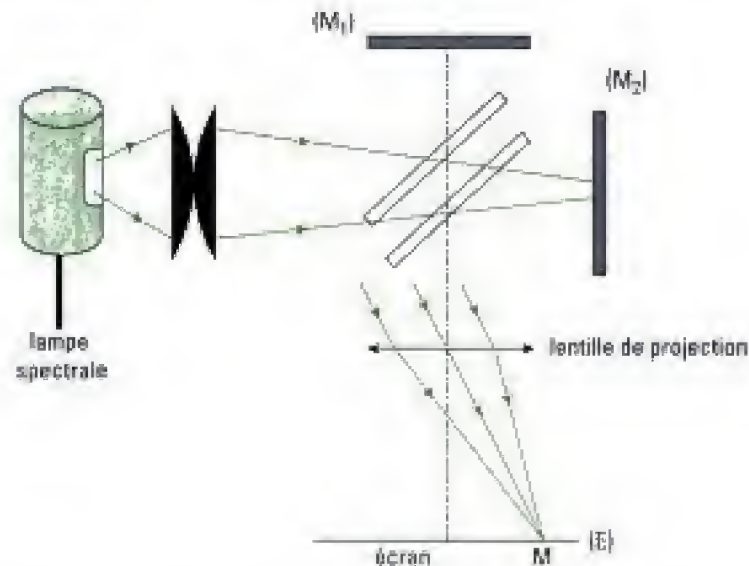


Fig. 17 – Montage expérimental d'étude des interférences données par une lame d'air à faces parallèles.

Là aussi, chariotier pour voir sortir les anneaux : l'épaisseur de la lame d'air augmente alors. Dans le cas d'un doublet spectral, si cette augmentation est suffisante, les anneaux se brouillent puis réapparaissent. Ceci illustre l'évolution du facteur de contraste lorsque la source comporte un doublet spectral (cf. chapitre 4 paragraphe D.2.).

Revenir au voisinage du contact optique et passer aux franges du coin d'air, ce qui veut dire mettre un petit angle aux miroirs (vis (V_1) et (V_2)), changer l'éclairage², changer la lentille de projection. On observe de nouveau les franges rectilignes du coin d'air.

2. Généralement, on rapproche la source de la (ou des) lentille(s).

B.5. Utilisation de la lumière blanche

B.5.1 – En configuration du coin d'air



Fig. 18 – Franges du coin d'air en lumière blanche : noter que sur l'écran la frange centrale est claire.

- Dans la configuration précédente du coin d'air, changer la lampe spectrale pour une source de lumière blanche. On observe généralement sur l'écran un blanc dit blanc d'ordre supérieur (cf. chapitre 4 paragraphe E).

- Agir sur la vis (V_1) avec beaucoup de doigté (moins d'un centième de mm) pour voir apparaître les franges colorées. À ce moment, la différence des chemins optiques est inférieure à la longueur de cohérence. La frange centrale claire (ou sombre si le montage introduit une différence de phase supplémentaire) identifie l'arête du coin. De part et d'autre de cette frange, on observe des franges irisées puis rapidement un blanc d'ordre supérieur (figure 18).

En raison de la faible cohérence temporelle de la lumière blanche, les franges sont localisées au voisinage de l'arête du coin.

Hidden page

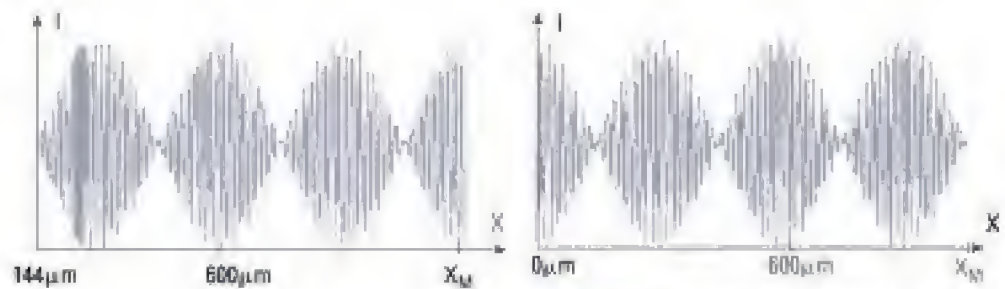


Fig. 20.a – Interférogramme et figure d'interférences pour un déplacement X_M correspondant à un maximum de contraste.

Fig. 20.b – Interférogramme et figure d'interférences pour un déplacement X_M correspondant à un minimum de contraste : anticoincidence.

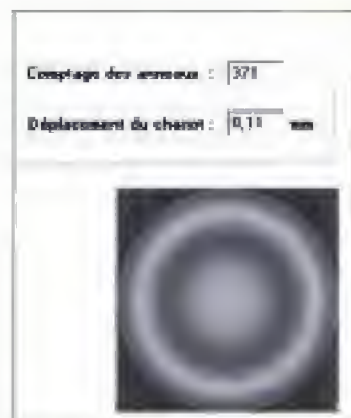


Fig. 21 – Comptage automatisé des anneaux et mesure du déplacement du chariot pour une radiation de longueur d'onde 590 nm.

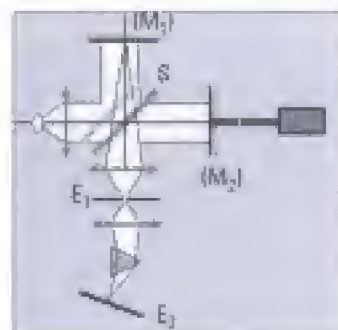


Fig. 22 – Montage d'étude de la composition spectrale de la lumière issue de l'interféromètre.

• Estimation de la longueur d'onde moyenne de la lumière de la lampe à vapeur de sodium

Le montage est celui de la partie B.4. On peut estimer cette longueur d'onde en mesurant le déplacement X du chariotage correspondant à un nombre donné d'anneaux qui apparaissent (ou disparaissent) au centre de la figure d'interférences observée sur l'écran. En effet, l'apparition successive de deux anneaux correspond à une différence de marche de λ_{moy} . Pendant ce temps, le miroir mobile (M_2) s'est déplacé de $\frac{\lambda_{\text{moy}}}{2}$.

Pour 100 anneaux, on mesure $X = 3$ centièmes de mm.

On en déduit que $\lambda_{\text{moy}} = 600$ nm, soit un écart relatif de 2 %.

Ce comptage peut être automatisé (figure 21).

• Étude du blanc d'ordre supérieur

En lumière blanche, obtenir les franges du coin d'air comme au paragraphe B.5.1. Réaliser le montage (figure 22), décrit à la figure 26 du chapitre 4.

L'image des miroirs se forme sur l'écran E_1 et l'image de la fente source du spectroscopie, pratiquée dans l'écran E_1 , en son centre et perpendiculairement au plan de figure, se forme sur l'écran E_2 . Le prisme en tant que spectroscopie décompose la lumière issue de la fente. En déplaçant très doucement le miroir mobile, on change l'épaisseur du coin d'air et les franges rectilignes se déplacent dans le plan d'observation E_1 , le spectroscopie analysant cette lumière. Comme déjà indiqué, la frange centrale est blanche : son spectre est continu (figure 23). En déplaçant légèrement le miroir mobile, nous commençons à voir des cannelures dans le spectre (figure 24). En se plaçant franchement dans le blanc d'ordre supérieur (figure 25), nous remarquons que les cannelures sont plus nombreuses.

Ces observations sont à rapprocher de l'étude qualitative concernant la cohérence temporelle menée au paragraphe B.2.1.8 du chapitre 3.



Fig. 23 – Figures d'interférences observées sur l'écran E_1 et spectre de la lumière issue de la frange centrale en lumière blanche: ce spectre est continu. La bande verticale claire correspond à la lumière jaune du spectre.



Fig. 24 – Figures d'interférences observées sur l'écran E_1 et spectre de la lumière issue d'une zone proche de la frange centrale en lumière blanche: le spectre comprend quelques cannelures. La frange centrale est proche du bord gauche de l'écran.



Fig. 25 – Figures d'interférences observées sur l'écran E_1 et spectre de la lumière issue d'une zone de blanc d'ordre supérieur: le spectre comprend de nombreuses cannelures.



Fig. 26 – Détermination de l'indice d'une lame de verre en lumière blanche: observation de la figure obtenue sur l'écran.

• Mesure de l'indice d'une lame de verre à faces parallèles d'épaisseur connue

Le montage est celui de la partie B.3. Obtenir les franges du coin d'air en lumière blanche. Lire la valeur de la position X_1 correspondante sur le vernier. Introduire, dans le bras 1 par exemple, une lame de verre orthogonale au faisceau lumineux de manière à ce qu'elle ne cache qu'une partie du faisceau et que son image coupe les franges irisées observées sur l'écran. Observer l'écran. Là où la lame est introduite sur le parcours de la lumière, les interférences ont disparu (figure 26). Ceci est dû à ce que la lame de verre augmente le chemin optique dans le bras où elle se trouve (ici le bras 1). Charioter en augmentant le longueur de l'autre bras (donc déplacer (M_2)) jusqu'à ce que les interférences réapparaissent sur l'écran dans la zone où elles avaient précédemment disparues. Noter la valeur X_2 .

La lame de verre d'épaisseur e_v a introduit une différence de chemin optique égal à $2(n - 1)e_v$ et la translation du miroir mobile a augmenté le parcours dans ce bras de $2(X_2 - X_1)$. Ces chemins optiques étant égaux, nous avons :

$$n = 1 + \frac{(X_2 - X_1)}{e_v}.$$

Expérimentalement, avec une lame de verre utilisée pour les préparations de microscopie, on mesure $X_2 - X_1 = 7$ centièmes de mm alors que l'épaisseur e_v de cette lame est de 14 centième de mm¹.

On trouve donc $n = 1,5$, ce qui correspond à un indice courant pour le verre.

• Estimation d'une longueur de cohérence temporelle

Le montage est celui du paragraphe B.4. Éclairer l'interféromètre avec la lumière du laser. Charioter pour observer si les anneaux disparaissent par perte de cohérence temporelle. Même en fond de butée lors de la translation du miroir mobile, les anneaux sont visibles. Ceci confirme les excellentes propriétés de cohérence temporelle de cette source lumineuse (cf. chapitre 1).

1. On suppose ici que l'indice n ne dépend pas de la longueur d'onde λ . Dans le cas contraire, voir exercice n° 7 du chapitre 4 (frange achromatique).

Reprendre l'expérience avec la lumière de la lampe à vapeur de sodium (ou la lumière filtrée de la lampe à vapeur de mercure) pour observer cette fois la disparition définitive des anneaux (après plusieurs brouillages pour la lumière du sodium).



Fig. 27 – Allure de la figure d'interférences observée avec un interféromètre de Péro-Fabry. Noter la finesse des anneaux. Les mesures n'en seront que plus précises.

C – Conclusion

Ce chapitre a montré que l'obtention d'interférences très lumineuses s'accompagne de la localisation des franges d'interférences. À ce sujet, il faut bien retenir que la localisation des interférences consiste seulement en une zone de plus fort contraste. Du côté des applications, la configuration en lame d'air, avec la très grande longueur de cohérence spatiale qui lui est associée, permet une étude spectrale des sources, qui utilise la transformée de Fourier (cf. exercice n° 7). Il existe aussi d'autres dispositifs capables de séparer spatialement les radiations, comme le prisme vu en première année, comme le réseau qui sera vu au chapitre suivant. Il existe aussi un autre interféromètre à division d'amplitude qui produit des interférences à partir d'un nombre « illimité »¹ d'ondes issues d'un même rayon incident : il s'agit de l'interféromètre de Péro-Fabry (figure 27) qui sera abordé à l'exercice 7.

1. Dans la pratique, ce nombre est bien entendu limité.

L'essentiel

✓ Les interférences localisées

• Interférences localisées

Afin de rendre le phénomène d'interférences plus lumineux, on éclaire l'interféromètre de Michelson à l'aide d'une source étendue. En contrepartie *les interférences ne s'obtiennent avec un contraste élevé que dans une zone limitée de l'espace*. Les interférences sont dites localisées.

• Lieu de localisation

- Le lieu de localisation s'obtient en cherchant le lieu des points qui correspondent à l'intersection de deux rayons émergents correspondant à un même rayon incident.

- L'interféromètre de Michelson travaille alors en diviseur d'amplitude.

Chacune des configurations de base de l'interféromètre de Michelson, lame d'air à faces parallèles ou coin d'air, admet un lieu de localisation différent :

- à l'infini pour la lame d'air à faces parallèles ;
- sur les miroirs pour le coin d'air.

• Parcours d'un rayon incident

La construction du parcours d'un rayon incident se fait comme au chapitre 4, en utilisant les symétries par rapport aux miroirs et la symétrie par rapport à la séparatrice.

Il est aussi possible de donner un schéma équivalent de chacune des deux configurations caractéristiques, sans séparatrice.

✓ Cas de la lame d'air à faces parallèles

- Les figures d'interférences sont des anneaux localisés à l'infini. Il faut éclairer les miroirs en lumière convergente, au plus près d'eux pour obtenir un grand nombre d'anneaux.

- La cohérence spatiale de l'interféromètre de Michelson, réglé en lame d'air à faces parallèles, éclairé par une source étendue, est très grande.

- La différence de marche en un point M de l'écran d'observation est :

$$\delta(M) = 2e \cos(i).$$

- L'intensité lumineuse sur l'écran est :

$$I(M) = \frac{I_0}{2} \left[1 + \cos \left[\frac{4\pi e \cos(i)}{\lambda_0} \right] \right].$$

I_0 est l'intensité du faisceau incident.

- Les lieux de même état d'interférence sont des lieux tels que l'angle i est constant ; ce sont des anneaux qui ont même axe que la lentille de projection.

✓ Cas du coin d'air d'angle α petit

- Les figures d'interférences sont des franges rectilignes localisées sur le coin d'air ou à son voisinage.

- Il faut éclairer les miroirs en lumière parallèle ou quasi parallèle à l'incidence quasi normale.

- La longueur de cohérence spatiale de l'interféromètre de Michelson, réglé en coin d'air, éclairé par une source large, est limitée.

- La différence de marche en un point M de l'écran d'observation est $\delta(M) = 2e \cos(i)$ qui, à l'incidence normale, se réduit à :

$$\delta(M) = 2e.$$

- L'épaisseur e est une fonction de la position X sur le coin.
- L'intensité lumineuse sur l'écran est :

$$I(M) = \frac{I_0}{2} \left[1 + \cos \left[\left(\frac{4\pi e}{\lambda_n} \right) \right] \right].$$

- L'interfrange s'écrit :
- $$i_c = \frac{\lambda_n}{2\alpha}.$$
- Les lieux de même état d'interférence sont des lieux tels que la position X soit constante ; ce sont des franges rectilignes qui ont même direction que l'arête du coin.

Mise en œuvre

Méthode n°1

Comment étudier les interférences localisées à deux ondes avec un diviseur d'amplitude ?

On souhaite identifier, puis étudier des interférences localisées à deux ondes lorsque l'interféromètre est un diviseur d'amplitude.

→ Savoir faire

- 1 La source est en général dite *étendue* (tant que sa dimension reste compatible avec la cohérence spatiale du dispositif interférentiel).

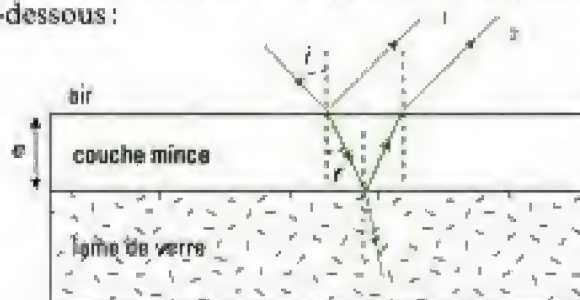
Vérifier que le système interférentiel produit des interférences localisées. Dans ce cas, un même rayon incident issu de la source est alors divisé en amplitude par une séparatrice. Les deux rayons issus de la division d'amplitude interfèrent sur la surface de localisation.

Les franges d'égale inclinaison sont localisées à l'infini et s'observent en pratique sur un écran situé soit à grande distance, soit dans le plan focal image d'une lentille convergente (exemple : interféromètre de Michelson réglé en lame d'air). *Les franges d'égale épaisseur* sont localisées au voisinage de la lame d'épaisseur variable, et s'observent en pratique grâce à une lentille de projection (exemple : interféromètre de Michelson réglé en coin d'air).

- 2 Vérifier que seules deux ondes interfèrent. Ceci est soit dit explicitement dans l'énoncé, soit suggéré par la donnée des valeurs numériques des coefficients de réflexion ou transmission (en amplitude du champ ou en énergie).
- 3 Si elle n'est pas donnée dans l'énoncé, effectuer une construction géométrique du trajet suivi par le rayon lumineux divisé en amplitude. Utiliser à cette fin les propriétés du dispositif (courbure des interfaces, indice de réfraction, ...) et les lois de l'optique géométrique.
- 4 Déterminer la différence de marche entre les deux rayons émergents. Outre les considérations géométriques, ne pas oublier les éventuels déphasages supplémentaires.
- 5 En déduire les grandeurs physiques étudiées (intensité lumineuse, rayons d'anneaux, ...) ou bien les conditions nécessaires à un fonctionnement particulier (absorption d'une radiation, filtrage optique, ...).

→ Application

On étudie une couche antireflet dont le schéma de principe et le parcours de rayons lumineux la traversant sont donnés ci-dessous :



Seuls les deux premiers rayons réfléchis sont pris en compte en raison de la faible valeur des coefficients de réflexion à chaque interface.

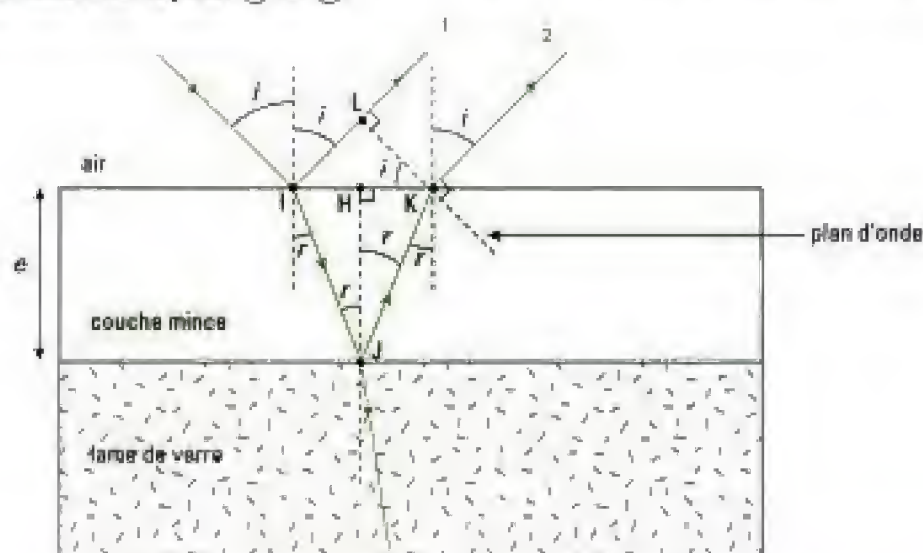
L'indice de la couche mince, noté n , est inférieur à celui de la lame de verre et celui de l'air est pris égal à 1.

Les indices de la couche mince et de la lame de verre sont choisis de telle sorte que les rayons réfléchis ① et ② aient même amplitude. L'ensemble est éclairé sous l'incidence i par une source monochromatique étendue, de longueur d'onde λ_0 .

Déterminer la différence de marche entre les rayons ① et ②. En déduire l'épaisseur minimale pour laquelle l'intensité lumineuse réfléchie à l'interface air / couche mince est nulle en incidence normale (l'énergie de l'onde incidente est alors entièrement transmise à travers la lame de verre).

Solution

- ① On étudie bien un diviseur d'amplitude éclairé par une source étendue. Les franges étudiées sont ici d'égale inclinaison et situées à l'infini.
- ② L'énoncé indique que seuls les deux premiers rayons réfléchis par la couche mince sont à prendre en compte. On étudie donc bien un problème d'interférences à deux ondes.
- ③ La construction géométrique est déjà proposée par l'énoncé. Toutefois, nous la reproduisons en introduisant quelques points géométriques qui vont nous permettre d'effectuer le calcul de la différence de marche entre les rayons ① et ② :



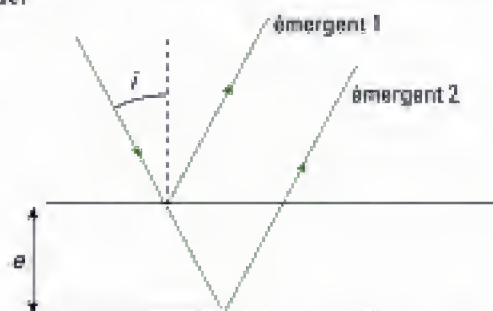
Il convient de réaliser la figure pour une incidence quelconque, même si on étudie le cas particulier de l'incidence normale dans un deuxième temps.

- ④ Notons que la réflexion au point I s'accompagne d'un déphasage supplémentaire égal à π puisqu'elle s'effectue depuis un milieu moins réfringent vers un milieu plus réfringent, et il en est de même pour la réflexion au point J. Les deux différences de marche supplémentaires correspondantes se compensent donc par différence.

Hidden page

Hidden page

propagation est l'air dont l'indice est pris égal à 1. Les réflexions et les transmissions se font sans aucun déphasage. La source est supposée monochromatique.



1) On réalise l'interférence à l'infini des deux rayons émergents. Établir l'expression de la différence de marche entre les deux rayons en fonction de e et de l'angle d'incidence i .

2) On note p l'ordre d'interférence lorsque l'incidence i est nulle. Donner l'expression de l'intensité de la figure d'interférence (à une constante multiplicative près) en fonction de i et de p .

3) On suppose, dans cette question et les suivantes, que l'angle d'incidence i est petit. On supposera que p est un nombre entier. Établir l'expression donnant les angles correspondant aux maxima d'intensité successifs en notant i_k l'incidence correspondant au k -ième maximum (compté à partir de $i = 0$). On exprimera i_k en fonction de k et de p . Tracer de façon grossière l'intensité en fonction de i (on se limitera à quatre ou cinq maxima).

4) Préciser comment se déforme la courbe de l'intensité en fonction de i lorsque e augmente.

*D'après écrit concours spécial MT,
Épreuve de Physique 1, 1998*

Niveau 2

Ex. 4 Franges du coin d'air

Un interféromètre de Michelson réglé en coin d'air est éclairé en incidence quasi-normale par une source non ponctuelle de lumière monochromatique.

1) Étudier la nature et la position des franges.

2) On place une lame à faces parallèles d'épaisseur e et d'indice n constant dans l'un des bras de l'interféromètre de telle sorte qu'elle soit éclairée en incidence quasi-normale par la source. Reprendre alors l'étude de la première question.

3) On suppose à présent que l'indice n de la lame peut évoluer linéairement dans le temps. Que se passe-t-il ?

Oral, CCP PC, 1997

Ex. 5 Interféromètre de Michelson éclairé par une source étendue

On reprend l'étude de l'interféromètre de Michelson réglé en lame d'air qui a été faite aux exercices 3 et 10 du chapitre précédent. On rappelle quelques résultats qui ont été établis :

• différence de marche entre les rayons issus de S et qui interfèrent au point M de (E) d'abscisse X :

$$\delta = 2e \cdot \left(1 - \frac{X^2}{2(D+d)^2} \right);$$

• rayon X_m du $m^{\text{ème}}$ anneau brillant compté à partir du centre O de (E) :

$$X_m = (D+d) \cdot \sqrt{\frac{m\lambda}{e}}.$$

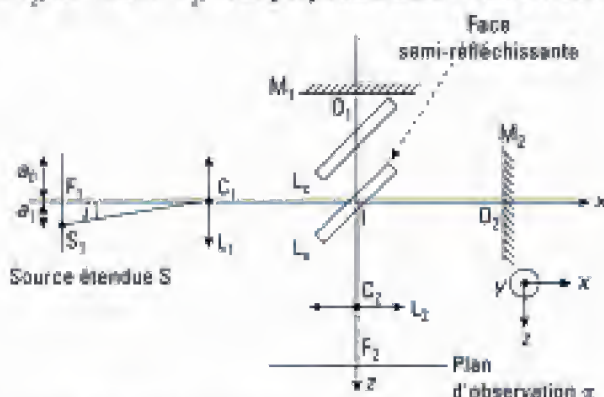
1) On considère à présent en plus de la source S , une autre source S' placée à une distance R de l'axe OS au-dessus ou en dessous de S . S et S' émettent de façon incohérente à la même longueur d'onde λ . On cherche à savoir à quelle condition les interférences sont encore visibles et dans quelle partie de l'espace. On choisit le critère suivant : les interférences sont encore visibles si le décalage entre ces deux systèmes de franges est inférieur à un quart d'interfrange. Trouver une condition sur R pour que les m premiers anneaux soient visibles.

2) Montrer que si D tend vers l'infini, on peut remplacer la source ponctuelle du début par une source large (forme d'un disque de rayon R) sans changer l'allure de la figure d'interférences. Quel est l'intérêt d'utiliser une source étendue à la place d'une source ponctuelle ? Comment fait-on pour observer des anneaux à l'infini ? Faire un schéma en donnant les distances, propriétés et qualités des instruments d'optique.

D'après Écrit, CCP TSI, 2000

Ex. 6 Anneaux d'égale inclinaison

On considère l'interféromètre de Michelson ci-dessous où les deux miroirs plans M_1 , de centre O_1 , et M_2 , de centre O_2 , sont perpendiculaires l'un à l'autre.



L'interféromètre comporte une lame séparatrice L_3 , de centre I , semi-réfléchissante, non absorbante. Cette lame est inclinée à 45° par rapport aux normales à M_1 et M_2 .

L_c désigne une lame compensatrice de même épaisseur que L_s , parallèle à L_s et on fera les deux hypothèses suivantes :

- on considère que cet ensemble est équivalent à une lame séparatrice infiniment mince ;
- on néglige le déphasage, induit par le traitement réfléchissant de L_s , entre l'onde 1 se réfléchissant sur M_1 et l'onde 2 se réfléchissant sur M_2 .

L'interféromètre est placé dans l'air assimilé au vide.

On considère que M_1 est fixe et que M_2 peut être translaté suivant l'axe x , parallèlement à l'axe z . La source étendue S , monochromatique, de longueur d'onde λ dans le vide, est placée au foyer objet principal F_1 d'une lentille L_1 (voir figure), de distance focale image $f_1 = 100$ mm. Cette source est assimilable à un disque centré en F_1 de rayon a_0 dans un plan parallèle à yz .

Le plan d'observation π , parallèle au plan xy , se situe dans le plan focal d'une lentille L_2 de foyer principal image F_2 , de distance focale image $f_2 = 1$ m. On note $e = IO_1 - IO_2$ où IO_1 représente la distance de I à O_1 et IO_2 la distance de I à O_2 .

1) On considère un point S_1 , situé à la distance a_1 de F_1 et repéré par l'angle i considéré petit (voir figure). On notera «rayon 1» le rayon se réfléchissant sur M_1 et «rayon 2», le rayon se réfléchissant sur M_2 , tous deux issus du rayon S_1C_1 .

Montrer que les rayons 1 et 2 interfèrent en un point M du plan focal de L_2 . Donner la distance F_2M . Que peut-on dire des autres rayons qui constituent le faisceau issu du point S_1 ? Montrer que la figure d'interférences est constituée d'anneaux de centre F_2 .

2) Montrer que la différence de chemin optique Δ des rayons 1 et 2 est donnée par la relation :

$$\Delta = 2e \cos i.$$

3) a) Donner l'expression de l'ordre d'interférence p au point M . En déduire l'ordre d'interférence p_0 en F_2 , défini par : $p_0 = k_1 + e$, où k_1 est l'ordre d'interférence relatif au premier anneau brillant. Comment varie l'ordre d'interférence lorsque i augmente ?

b) L'angle i étant faible, déterminer le rayon du $n^{\text{ème}}$ anneau brillant appelé r_n en fonction de p_0 , n et e .

c) A.N. $e = 1100,0$ μm . Déterminer p_0 puis l'ordre d'interférence et le rayon des premier et cinquième anneaux brillants pour $\lambda = 546,07$ nm (raie de mercure). Quel doit être le rayon a_0 de la source si l'on veut pouvoir observer les cinq premiers anneaux ?

4) a) On diminue la valeur de e . Montrer que les anneaux semblent «rentrer». Calculer la valeur de e pour laquelle le premier anneau disparaît. En déduire le rayon r'_1 du premier nouvel anneau et le comparer au rayon de l'anneau qui a disparu.

b) Décrire le phénomène observé pour $e = 0$.

D'après Écrist, CCP Physique 2, MP, 2003

Ex. 7 Interféromètre de Pérot-Fabry

On considère une lame à faces parallèles, d'indice $n = 1,6$ et d'épaisseur $e = 2$ μm ; ses faces sont recouvertes d'un dépôt métallique d'épaisseur négligeable. Les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude pour ces deux dioptries sont notés r et t ; on pose $r^2 = R$ et $t^2 = T$.

Cette lame est éclairée par une source monochromatique (λ_0), étendue ; un rayon atteignant la lame sous l'incidence i , donne lieu, après réflexions multiples, aux rayons transmis 1, 2, 3... On étudie le phénomène d'interférences dans le plan focal d'une lentille convergente.

R , voisin de 1, par valeurs inférieures, vérifie : $R + T = 1$.

1) Traduire cet énoncé par un schéma clair et annoté.

2) Pour quelle raison ne peut-on se contenter des rayons émergents 1 et 2 ? On pourra, par exemple, raisonner avec $R = 0,9$.

3) Quel est le déphasage φ entre deux rayons transmis consécutifs, en fonction de i' (angle de réfraction), n , e et λ_0 ?

4) Si A_0 est l'amplitude de l'onde incidente, justifier brièvement que l'amplitude complexe de l'onde transmise à l'infini s'obtient par la somme :

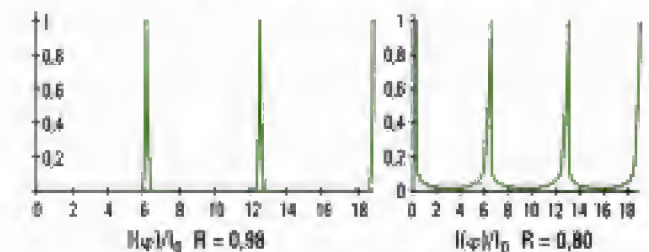
$$A_0 T + A_0 T R e^{i\varphi} + A_0 T R^2 e^{2i\varphi} + A_0 T R^3 e^{3i\varphi} + \dots$$

5) Montrer que l'intensité de l'onde résultante est :

$$I(\varphi) = \frac{I_0}{1 + m \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}.$$

Donner les expressions de I_0 et m en fonction de A_0 , R et d'un coefficient à définir.

6) On considère les deux courbes $\frac{I(\varphi)}{I_0}$ pour $R = 0,98$ et $R = 0,80$. Quel avantage voyez-vous dans le 1^{er} cas ?



Écrist, ENGEES, PC-PSI, 1998

Ex. 8 Anneaux de Newton

Une lentille sphérique de très grand rayon de courbure R est posée sur une lame de verre plane.

L'ensemble est éclairé par une lumière monochromatique sous une incidence quasi normale.

À chaque réflexion, l'intensité de l'onde réfléchie représente 5 % de celle de l'onde incidente. La source et le dispositif de visée ne sont pas représentés.

Hidden page

Hidden page

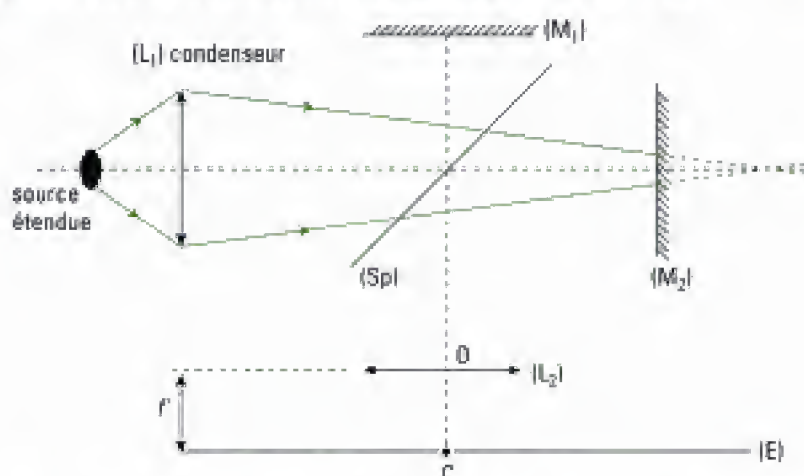
Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1

Remarque préalable : dans cet exercice, il était demandé aux candidats de faire preuve de concision en apportant des réponses courtes, simples et sans démonstration théorique.

1) Schéma du dispositif lorsque l'interféromètre est réglé en lame d'air :



Sur cette figure, nous n'avons représenté que le trajet des rayons lumineux depuis la source jusqu'au miroir mobile pour mettre en évidence le fait que l'ensemble {source + condensateur} est réglé de manière à faire converger la lumière sur les miroirs.

2) Les rayons émergents de l'interféromètre interfèrent à l'infini. Pour permettre leur observation, on utilise une lentille convergente (L_2) et l'on place l'écran d'observation (E) dans le plan focal image de (L_2).

3) Vu le réglage imposé à l'axe de la lentille, le centre C des anneaux est confondu avec le foyer principal image F' de la lentille de projection (L_2).

4) a) En faisant pivoter légèrement la lentille (L_2) en respectant les conditions de Gauss, le centre de la figure d'interférences reste confondu avec le point C (qui est désormais un foyer secondaire de (L_2)) car les rayons qui passent par le centre O de (L_2) ne changent pas de direction. La figure reste globalement invariante sur l'écran.

b) Si on déplace (L_2) parallèlement à l'écran (E) d'une distance d , l'ensemble de la figure d'interférences se déplace de la même distance et dans le même sens sur l'écran.

5) Chaque anneau correspondant à une incidence donnée, il est nécessaire de créer des incidences variées sur la lame d'air fictive afin d'observer un grand nombre d'anneaux.

Exercice 2

1) Il s'agit de montrer l'équivalence à un coin d'air : revoir le paragraphe A.2 du cours.

2) Afin d'éclairer les miroirs par des faisceaux quasi-parallèles, on peut **placer une source ponctuelle au foyer objet d'une lentille convergente L_1** (ou d'un condensateur). La source réelle n'étant jamais ponctuelle, on utilise un diaphragme afin de limiter l'étendue géométrique de la source.

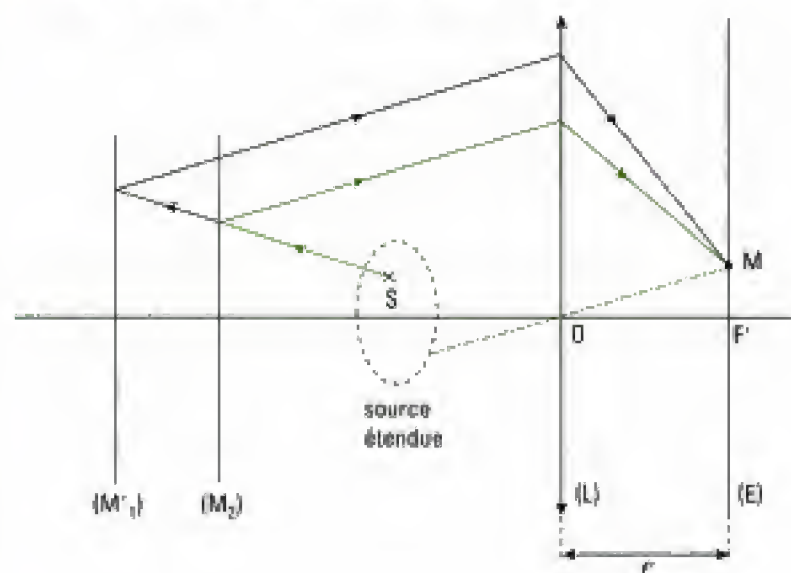
Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

- Pour observer les anneaux à l'infini

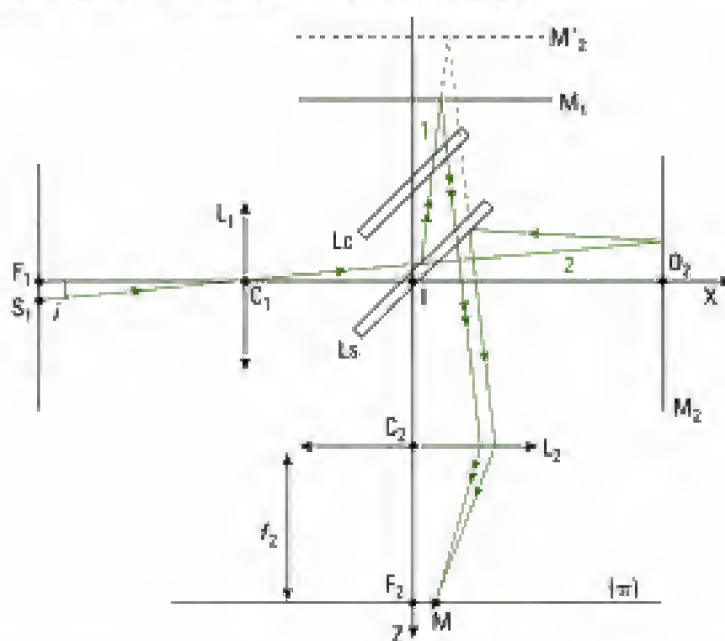


On utilise une lentille convergente dont l'axe optique est orienté perpendiculairement à la lame d'air. On observe alors les anneaux d'égale inclinaison dans le plan focal image de la lentille (L).

La lentille de projection (L) est en pratique de grande focale (50 à 200 cm).

Exercice 6

- 1) La construction du trajet suivi par les deux rayons a été exposée à l'exercice 3 du chapitre 4 auquel nous renvoyons le lecteur si besoin. On obtient ainsi :



- Distance F_2M

Après avoir traversé l'interféromètre, les rayons 1 et 2 se dirigent vers L_2 et sont inclinés d'un angle i par rapport à son axe optique. Ils convergent au point appartenant au plan focal de L_2 tel que :

$$F_2M = f_2 \cdot \tan i \quad (\approx f_2 \cdot i).$$

- Que peut-on dire des autres rayons issus du point S_1 ?

Tous les rayons issus du point S_1 interfèrent dans le plan focal de L_2 .

- Nature de la figure d'interférences (cf. méthode n° 1)

La source étant par hypothèse assimilée à un disque centré en F_1 et de rayon a_0 , celle-ci est ici invariante par rotation d'axe (Lx). La figure d'interférences est par conséquent invariante par rotation d'axe (Lz). **On observe donc des anneaux d'égale inclinaison i .**

2) Il s'agit d'établir l'expression de la différence de marche due à la lame d'air. D'après le cours :

$$\Delta = 2e \cdot \cos i.$$

3) a) • Ordre d'interférence p au point M

$$p = \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{2e}{\lambda} \cdot \cos i \quad (\lambda = \lambda_0, \text{ l'air étant assimilé au vide})$$

• Ordre d'interférence p_0 au point F_2

On a $i = 0$ lorsque les rayons convergent en F_2 , donc :

$$p_0 = \frac{2e}{\lambda}.$$

L'ordre d'interférence est maximal au centre et l'ordre d'interférence associé au premier anneau brillant correspond à la partie entière de p_0 . Ainsi, on peut écrire :

$$p_0 = k_1 + \varepsilon$$

avec $k_1 = E\left(\frac{2e}{\lambda}\right)$ (partie entière du nombre $\frac{2e}{\lambda}$)

$\varepsilon = p_0 - k_1$ (partie fractionnaire de p_0 usuellement nommée excédent fractionnaire)

• Comment varie p lorsque i augmente ?

$p = \frac{2e}{\lambda} \cdot \cos i$ **diminue lorsque i augmente.**

b) L'ordre k_n du $n^{\text{ème}}$ anneau brillant se déduit de celui du 1^{er} anneau brillant selon :

$$k_n = k_1 - (n - 1), \text{ avec } k_1 = p_0 - \varepsilon.$$

On a aussi :

$$k_n = p_0 \cdot \cos i_n \approx p_0 \cdot \left(1 - \frac{i_n^2}{2}\right) \text{ car } i_n \text{ est faible}$$

donc :

$$p_0 - \varepsilon - (n - 1) = p_0 \cdot \left(1 - \frac{i_n^2}{2}\right)$$


soit :

$$i_n = \sqrt{\frac{2}{p_0} \cdot (\varepsilon + n - 1)}.$$

On en déduit le rayon r_n de cet anneau brillant :

$$r_n = f_2 \cdot \tan i_n \approx f_2 \cdot i_n, \text{ d'où : } r_n = f_2 \cdot \sqrt{\frac{2}{p_0} \cdot (\varepsilon + n - 1)} \quad (1)$$

$$c) p_0 = \frac{2e}{\lambda} = \frac{2 \times 1\,100 \cdot 10^{-6}}{546,07 \cdot 10^{-9}} = 4\,028,8.$$

 Nous avons choisi les valeurs numériques $e = 1\,100,0 \mu\text{m}$ et $\lambda = 546,07 \text{ nm}$ compatibles avec la suite du problème posé. Une telle précision sur l'épaisseur e est inaccessible avec le modèle d'interféromètre de Michelson utilisé habituellement en travaux pratiques. Par contre, elle est compatible avec certains appareils industriels de haute précision (déplacements des miroirs repérés par mesure électronique).

On a donc $\varepsilon = 0,8$ et ainsi :

– pour le 1^{er} anneau : $k_1 = 4\,028$ et $r_1 = \sqrt{\frac{2}{4\,028,8} \times (0,8 + 1 - 1)} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 20 \text{ mm};$

– pour le 5^e anneau : $k_4 = 4\,024$ et $r_4 = \sqrt{\frac{2}{4\,028,8} \times (0,8 + 5 - 1)} = 4,9 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 49 \text{ mm}.$

- Rayon a_0 de la source pour observer les cinq premiers anneaux

Il faut que la source émette un rayon incliné d'un angle au moins égal à i_5 sur l'axe (Ix), avec :

$$i_5 \approx \frac{r_5}{f_2} \quad \text{et donc :} \quad \frac{a_0}{f_1} \geq i_5$$

d'où :

$$\frac{a_0}{f_1} \geq \frac{r_5}{f_2} \Leftrightarrow \boxed{a_0 \geq r_5 \cdot \frac{f_1}{f_2}} \quad \text{A.N. : } a_0 \geq 49 \times \frac{0,1}{1} = 4,9 \text{ mm.}$$

- 4) a) • Montrer que les anneaux semblent rentrer

L'ordre d'interférence $k_n = \frac{2e}{\lambda} \cdot \cos i_n$ associé au rayon du $n^{\text{ème}}$ anneau brillant est une fonction croissante de l'épaisseur e . Si celle-ci diminue, alors $\cos i_n$ augmente (k_n est une constante pour cet anneau). Ainsi, i_n diminue, ce qui signifie que l'anneau semble rentrer au centre de la figure d'interférences.

- Valeur de l'épaisseur pour laquelle le 1^{er} anneau disparaît

L'angle d'incidence i_1 associé au premier anneau qui disparaît pour une nouvelle valeur e' de l'épaisseur est nul :

$$k_1 = \frac{2e'}{\lambda} \cdot \cos i_1 = \frac{2e'}{\lambda}, \quad \text{d'où :} \quad \boxed{e' = \frac{\lambda \cdot k_1}{2}}$$

$$\text{A.N. : } e' = \frac{546,07 \cdot 10^{-9} \times 4028}{2} = 1\,099,8 \text{ } \mu\text{m} \quad (\text{soit } e - e' = 0,2 \text{ } \mu\text{m}).$$

- Rayon r'_1 du premier nouvel anneau

Le nouvel ordre au centre p_0 est égal à k_1 , le premier nouvel anneau était le deuxième anneau brillant avant diminution de e (donc $n = 2$) et e devient nul. Ainsi, il vient :

$$r'_1 = f_2 \cdot \sqrt{\frac{2}{p_0} \cdot (e + n - 1)} = \boxed{f_2 \cdot \sqrt{\frac{2}{k_1}}}$$

$$\text{A.N. : } r'_1 = \sqrt{\frac{2}{4028}} = 22,3 \text{ mm.}$$

Cette valeur est supérieure à celle trouvée pour r_1 , ce qui signifie qu'une diminution de l'épaisseur a pour conséquence de faire rentrer les anneaux au centre dont les rayons sont de plus en plus grands. Ce résultat n'a rien de surprenant puisque l'interfrange :

$$i = f_2 \cdot \sqrt{\frac{2}{p_0}} \cdot [\sqrt{e + n} - \sqrt{e + n - 1}]$$

augmente si n diminue.

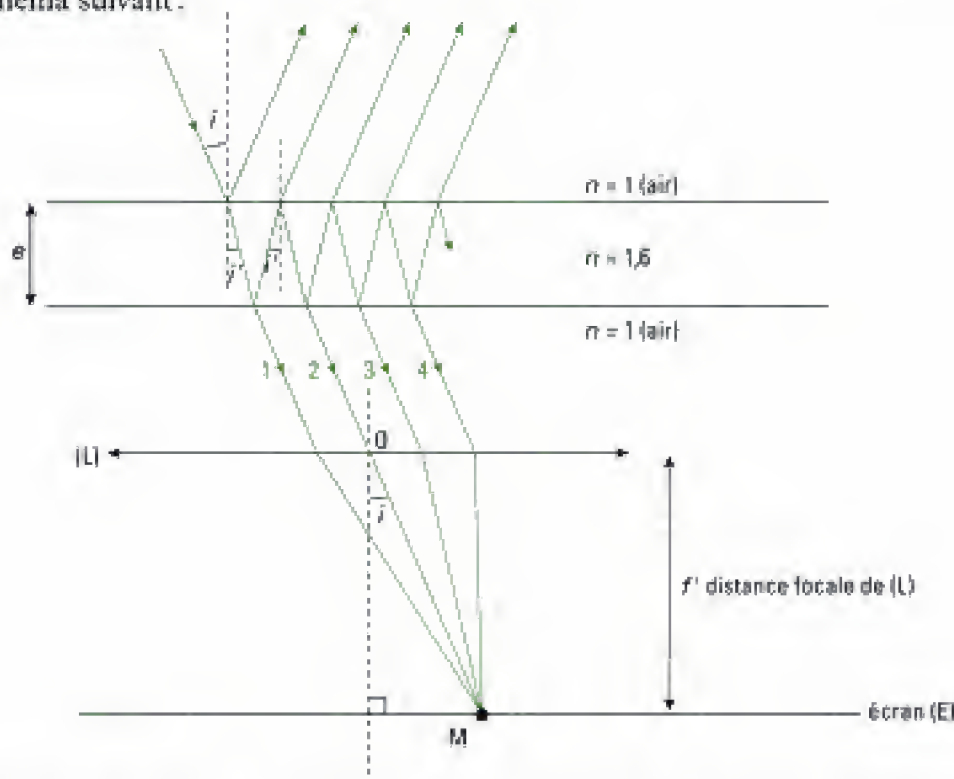
- b) Lorsque $e = 0$, Δ est nulle quel que soit l'angle i . Ceci signifie que l'éclairement est uniforme en tout point M de l'image géométrique de S , formée dans le plan (π) d'observation. On observe alors la **teinte plate**.

Exercice 7

- 1) Commentons au préalable quelques données de l'énoncé :

- Les faces de la lame sont recouvertes d'un dépôt métallique qui a pour rôle d'augmenter le coefficient de réflexion R et ainsi obtenir R voisin de 1. Le dépôt étant d'épaisseur négligeable, on assimile l'épaisseur de l'ensemble à celle de la lame.
- La lame est éclairée par une source étendue. Les franges d'interférences sont donc localisées et il s'agit ici de franges d'égale inclinaison localisées à l'infini. Pour cette raison, on utilise une lentille convergente (L) afin d'observer les anneaux d'égale inclinaison dans le plan focal image de (L).

On a donc le schéma suivant :



Il s'agit donc d'étudier des interférences par division d'amplitude entre ondes multiples.

- Les faces extérieures de la lame, non traitées par dépôt, sont en réalité légèrement prismatiques afin de minimiser les réflexions parasites.
- La métallisation des faces est aujourd'hui abandonnée au profit de couches diélectriques qui permettent de minimiser l'absorption de la lame (négligée dans cet exercice).

2) Notons A_0 l'amplitude de l'onde incidente sur la lame. Le rayon émergent ① est issu de l'onde incidente après deux transmissions, donc d'amplitude :

$$t^2 \cdot A_0 = T \cdot A_0 = 0,1 \cdot A_0.$$

Le rayon émergent ② est issu de l'onde incidente après deux transmissions et deux réflexions, donc d'amplitude :

$$t^2 \cdot r^2 \cdot A_0 = T \cdot R \cdot A_0 = 0,09 \cdot A_0.$$

De même, l'amplitude du rayon ③ est égale à :

$$t^2 \cdot r^4 \cdot A_0 = T \cdot R^2 \cdot A_0 = 0,081 \cdot A_0.$$

Ce raisonnement sur les trois premiers rayons transmis montre qu'il n'est pas possible de se limiter aux deux premiers rayons car **l'amplitude des autres rayons transmis ③, ④, ... n'est pas négligeable** devant celle des deux premiers rayons, vu la faible décroissance de l'amplitude.

- Le même raisonnement appliqué aux rayons renvoyés par la face d'entrée de la lame montre que l'amplitude du premier rayon (réfléchi) est bien plus importante que celle des rayons suivants (transmis et réfléchis). Leur interférences sont donc peu contrastées, ce qui justifie que l'on étudie plutôt celles des rayons transmis par la face arrière de la lame.

3) Il faut d'abord déterminer la différence de marche entre deux rayons transmis consécutifs. Ce calcul a déjà été fait dans l'application de la méthode 1 et conduit ici, avec les notations de cet exercice, à :

$$\delta = 2ne \cdot \cos i'.$$

D'où :

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \delta = \frac{4\pi \cdot ne \cdot \cos i'}{\lambda_0}$$

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Il faut ici prendre garde au fait que la source utilisée est monochromatique et qu'il est donc *a priori* impossible de repérer l'ordre d'une frange d'interférences.



Le plus simple est alors d'étudier l'écartement des franges entre elles soit dans la direction $\{Ox\}$ soit dans la direction $\{Oz\}$.

Dans la direction $\{Ox\}$, l'écartement des franges est constant et vaut :

$$\frac{dx_0}{dm} = \frac{\lambda_0}{2\varepsilon}.$$

Il ne dépend pas de la quantité $(n - n_0)$ et donc ne présente aucun intérêt en ce cas.

Dans la direction $\{Oz\}$, l'écartement des franges s'écrit :

$$\frac{dz_0}{dm} = \frac{\lambda_0 \cdot L}{2(n - n_0) \cdot e_{\max}}.$$

On se place alors dans le meilleur des cas vis-à-vis de la résolution du capteur en posant :

$$\frac{dz_0}{dm} = 0,1 \text{ mm}.$$

$$\text{A.N. : } n - n_0 = \frac{\lambda_0 \cdot L}{2 \cdot \left(\frac{dz_0}{dm} \right) \cdot e_{\max}} = \frac{628 \cdot 10^{-9} \times 10^{-2}}{2 \times 10^{-4} \times 5 \cdot 10^{-3}} = 6,28 \cdot 10^{-3}.$$

Test : l'énoncé annonce un écart $(n - n_0)$ voisin de 10^{-3} qui est bien en accord avec le résultat précédent.

Exercice 10

1) • Calcul de $F(\omega)$

L'interféromètre étant ici éclairé par une source supposée monochromatique de pulsation ω_0 , l'intensité lumineuse en F_2 s'écrit ici sous la forme :

$$I(\Delta) = 2I_0 \cdot \left[1 + \cos\left(\frac{\omega_0 \cdot \Delta}{c}\right) \right]$$

avec I_0 intensité transmise en sortie de l'interféromètre si un des miroirs est occulté.

Remarque : au point F_2 , on a $\Delta = 2\ell$ puisqu'ici l'interféromètre est réglé en lame d'air.

On a donc :

$$\begin{aligned} F(\omega) &= 2I_0 \cdot \int_0^{\Delta_{\max}} \left[1 + \cos\left(\frac{\omega_0 \cdot \Delta}{c}\right) \right] \cdot \cos\left(\frac{\omega \cdot \Delta}{c}\right) \cdot d\Delta \\ \Leftrightarrow F(\omega) &= 2I_0 \cdot \left\{ \int_0^{\Delta_{\max}} \cos\left(\frac{\omega \cdot \Delta}{c}\right) \cdot d\Delta + \int_0^{\Delta_{\max}} \cos\left(\frac{\omega_0 \cdot \Delta}{c}\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega \cdot \Delta}{c}\right) \cdot d\Delta \right\} \\ \Leftrightarrow F(\omega) &= 2I_0 \cdot \left\{ \frac{c}{\omega} \cdot \sin\left(\frac{\omega \cdot \Delta_{\max}}{c}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{c}{\omega + \omega_0} \cdot \sin\left(\frac{\omega + \omega_0}{c} \Delta_{\max}\right) + \frac{c}{\omega - \omega_0} \cdot \sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{c} \Delta_{\max}\right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Soit en utilisant la fonction sinus-cardinal de x telle que $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$:

$$F(\omega) = 2I_0 \cdot \Delta_{\max} \cdot \left[\text{sinc}\left(\frac{\omega \cdot \Delta_{\max}}{c}\right) + \frac{1}{2} \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega + \omega_0}{c} \Delta_{\max}\right) + \frac{1}{2} \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega - \omega_0}{c} \Delta_{\max}\right) \right].$$

• Allure de $F(\omega)$

La fonction $F(\omega)$ est la somme de trois termes en $\text{sinc}(x)$, le premier centré sur $\omega = 0$, les deux suivants sur $\omega = -\omega_0$ et $\omega = \omega_0$ avec une amplitude deux fois plus petite.

Sur la simulation ci-dessous, on a volontairement choisi des valeurs numériques de ω_0 et Δ_{max} permettant une lisibilité satisfaisante de la figure.

En pratique, sur un interféromètre de travaux pratiques, on a $\Delta_{max} \approx 15 \text{ mm}$.

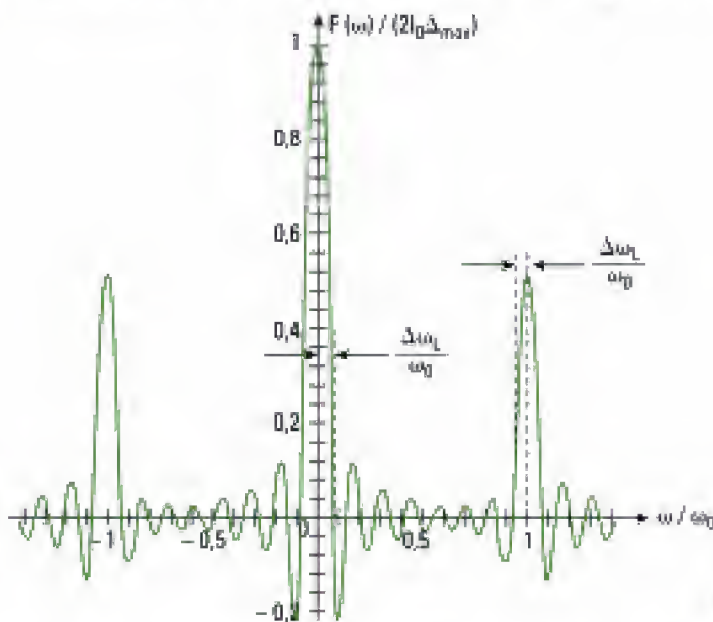


figure 1

Commentaire : cette courbe fait apparaître trois pics de largeur caractéristique donnée par le pic central de la fonction sinc (x) soit ici $\Delta\omega_L = \frac{\pi \cdot c}{\Delta_{max}}$. Les pics seront bien séparés si on a :

$$\omega_0 \gg 2\Delta\omega_L.$$

Avec $\omega_0 = \frac{2\pi \cdot c}{\lambda_0}$, il vient : $\lambda_0 \ll \Delta_{max}$ ce qui est une hypothèse légitime dans le domaine des longueurs d'onde du visible.

2) Les deux radiations de pulsations ω_1 et ω_2 sont incohérentes entre elles. Ainsi, l'intensité totale mesurée au point F_2 est la somme des éclaircements dus à chaque radiation. Par conséquent, en notant $F(\omega_1)$ et $F(\omega_2)$ les transformées associées respectivement aux pulsations ω_1 et ω_2 , il vient :

$$F(\omega) = F(\omega_1) + F(\omega_2).$$

En choisissant des valeurs numériques permettant la lisibilité des figures, on a représenté ci-dessous l'allure de $F(\omega_1)$ et $F(\omega_2)$ sur la figure 2 puis celle de $F(\omega)$ sur la figure 3 :

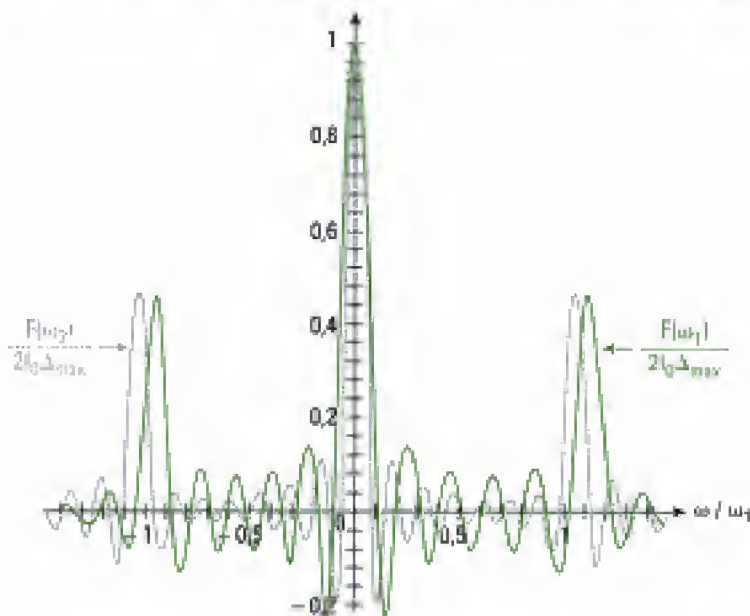


figure 2

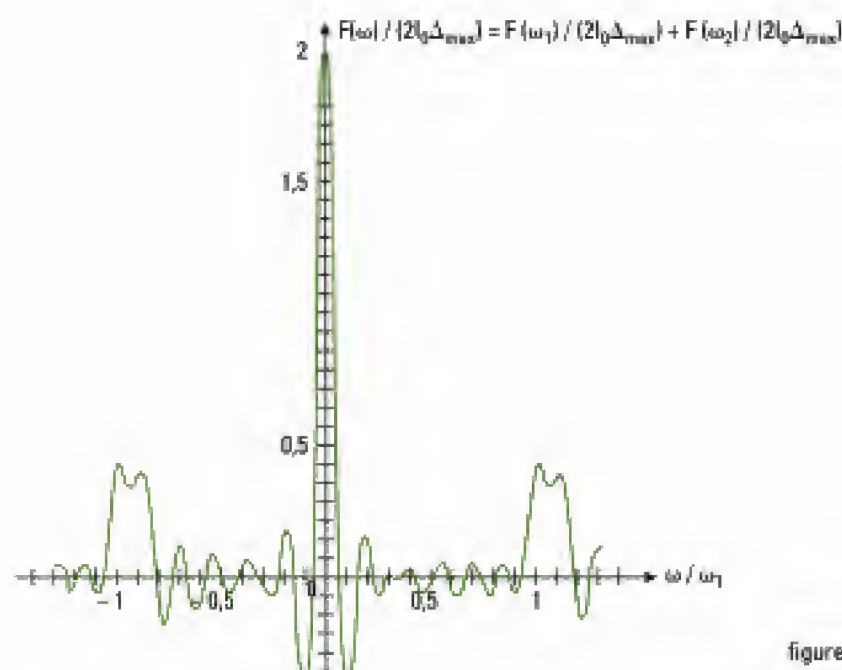


figure 3

3) • Utilisation du dispositif comme un spectromètre

Un spectromètre a pour but de séparer deux radiations voisines. Il permet ainsi de mesurer ω_1 , ω_2 , l'écart fréquentiel $\omega_2 - \omega_1$ ou encore l'intensité relative de ces deux radiations. Par exemple, dans le cas illustré en figure 3, les radiations de pulsations ω_1 et ω_2 voisines sont ainsi séparées.

• Choix d'un critère de résolution spectrale

On observe sur la figure 3 que les deux radiations sont séparées. Ceci est vérifié tant que les deux maximums principaux autour de $\frac{\omega}{\omega_1} = \mp 1$ sont discernables.

On choisit alors le critère de Rayleigh qui indique que **les deux radiations sont en limite de résolution lorsque le premier minimum nul d'un pic coïncide avec le maximum principal de l'autre pic**. Ce qui s'écrit ici avec les notations précédentes :

$$\Delta\omega_L < \omega_2 - \omega_1 \Leftrightarrow \frac{\pi \cdot c}{\Delta_{\max}} < \omega_2 - \omega_1.$$

• Résolution $\Delta\omega_R$ et pouvoir de résolution \mathcal{R} du spectromètre

La résolution découle du critère de Rayleigh :

$$\Delta\omega_R = \frac{\pi \cdot c}{\Delta_{\max}},$$

d'où :

$$\mathcal{R} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_R} = \frac{\omega_0 \cdot \Delta_{\max}}{\pi \cdot c}.$$

Par ailleurs, les maximums d'intensité enregistrés par le détecteur sont tels que :

$$\cos\left(\frac{\omega_0 \cdot \Delta}{c}\right) = 1, \text{ soit : } \frac{\omega_0 \cdot \Delta}{c} = 2m\pi, \text{ avec } m \in \mathbb{N}^*$$

(maximums comptés à partir de la teinte plate du contact optique à $\ell = 0$).

Donc pour $0 < \Delta \leq \Delta_{\max}$:

$$0 < m = \frac{\omega_0 \cdot \Delta}{2\pi \cdot c} \leq \frac{\omega_0 \cdot \Delta_{\max}}{2\pi \cdot c}$$

et :

$$N_{\max} = E\left(\frac{\omega_0 \cdot \Delta_{\max}}{2\pi \cdot c}\right)$$

Si Δ_{\max} est fixé, alors $E\left(\frac{\omega_0 \cdot \Delta_{\max}}{2\pi \cdot c}\right)$ est fixé de même que \mathcal{R} . On peut d'ailleurs préciser que N_{\max} est de l'ordre de $\frac{\omega_0 \cdot \Delta_{\max}}{2\pi \cdot c}$ et :

$$\mathcal{R} \approx 2N_{\max}$$

4) Chaque bande spectrale $[\omega, \omega + \delta\omega]$ émet l'intensité lumineuse δI_ω et dont la transformée $F(\omega)$ s'écrit :

$$F(\omega) = \int_0^{\Delta_{\max}} 2 \cdot I_\omega(\omega) \cdot d\omega \cdot \left[1 + \cos\left(\frac{\omega \cdot \Delta}{c}\right) \right] \cdot \cos\left(\frac{\omega \cdot \Delta}{c}\right) \cdot d\Delta.$$

La condition sur $\Delta\omega_R$ pour laquelle l'étude fine du profil est possible est toujours issue du critère de Rayleigh. Ainsi, chaque bande spectrale $[\omega, \omega + \delta\omega]$ doit être résolue de ses voisines et ce quel que soit $\omega \in \left[\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right]$. Les radiations seront d'autant mieux résolues que $\Delta\omega$ et $\Delta\omega_R$ sont éloignées avec :

$$\Delta\omega \gg \Delta\omega_R = \frac{\pi \cdot c}{\Delta_{\max}}$$

Commentaires :

– Cette dernière question illustre donc la possibilité de remonter à la densité spectrale d'une source grâce à la transformée $F(\omega)$ et ce d'autant mieux que Δ_{\max} est élevée. La limite mathématique $\Delta_{\max} \rightarrow \infty$ conduit à écrire :

$$F(\omega) = \int_0^{+\infty} I(\Delta) \cdot \cos\left(\frac{\omega \cdot \Delta}{c}\right) \cdot d\Delta$$

qui représente la transformée de Fourier en cosinus de l'interférogramme $I(\Delta)$ à un facteur multiplicatif près. Ainsi, en pratique on enregistre $I(\Delta)$ au centre de la figure d'interférences en faisant varier Δ de façon continue (déplacement motorisé de M_1), puis par calcul logiciel on détermine $F(\omega)$ qui permet d'accéder à la densité spectrale de la source. On parle de spectrométrie par transformée de Fourier.

– La mise en œuvre expérimentale est délicate (Δ_{\max} élevée, déplacement de M_1 sans aucune rotation, ...) et il convient dans certains cas de tenir compte du déphasage dû à la séparatrice.

Exercice 11

Remarque : nous supposons dans ce qui suit que le modèle de l'interféromètre de Michelson à disposition ne permet pas d'éclairer seulement l'ensemble {compensatrice + séparatrice}. Si tel n'est pas le cas, la solution qui suit n'est pas foncièrement différente, elle permet simplement de s'affranchir des réflexions parasites dues aux miroirs.

• Analyse préalable du problème posé

– Quelle source lumineuse utiliser ? La source laser est la plus indiquée compte tenu de sa puissance lumineuse, de la grande directivité du faisceau émis et de sa grande longueur de cohérence.

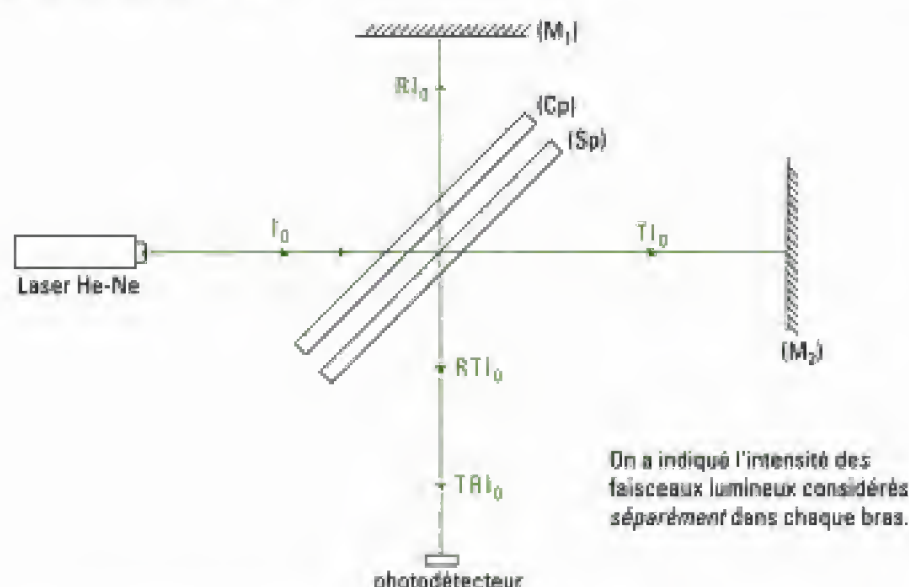
– Pour mesurer le produit RT des coefficients R et T de la séparatrice, il est nécessaire de faire une mesure énergétique, ce qui est possible avec un photodétecteur du type photodiode par exemple (voir paragraphe E chapitre 1).

– Ensuite, il faut bien identifier le système dont on souhaite déterminer le rendement énergétique : il s'agit *uniquement* de la séparatrice (Sp). Or on sait en pratique que si le parallélisme entre séparatrice et compensatrice (Cp) est réalisé, le faisceau qui traverse chacun des bras de l'interféromètre est alors constitué de rayons qui ont pour certains subi plusieurs réflexions parasites entre (Sp), (Cp) et les faces des miroirs. Ainsi, si l'interféromètre était utilisé avec (Sp) et (Cp) parallèles, on mesurerait un rendement qui tiendrait compte aussi du pouvoir réflecteur de la lame com-

pensatrice. Il subsiste une solution : *dérégler le parallélisme* afin de ne faire la mesure que sur les faisceaux qui sont uniquement réfléchis sur (Sp). Ils donnent lieu sur l'écran à deux taches lumineuses (une seule si le parallélisme des deux miroirs est réalisé) que l'on distingue de celles dues aux réflexions parasites car elles sont plus lumineuses que les autres (revoir le paragraphe B.2 du cours, deuxième étape du réglage). Ainsi, en plaçant le photodétecteur dans la direction de l'une de ces deux taches, on est certain de ne pas prendre en compte les réflexions parasites ayant lieu sur la compensatrice.

Avec une intensité lumineuse du faisceau incident notée I_0 sur (Sp), l'intensité du faisceau réfléchi vaut RI_0 et celle du faisceau transmis vaut TI_0 .

- Schéma de principe du montage



Remarques :

- Quel est l'intérêt de faire la mesure avec les deux bras ? En effet, on pourrait imaginer supprimer le retour d'un faisceau lumineux vers la séparatrice après division d'amplitude, en plaçant un écran opaque dans un des bras de l'interféromètre. Cela conduirait à mesurer théoriquement la quantité RTI_0 . En réalité, il existe toujours une légère dissymétrie des deux chemins optiques parcourus (incidences sur la compensatrice, ...). Aussi, il est préférable de faire la mesure avec les deux bras de l'interféromètre, ce qui permet de moyenner le résultat de la mesure.

- Les coefficients R et T caractérisent essentiellement la couche semi-réfléchissante déposée sur la lame de verre qui constitue (Sp). En effet, l'énoncé précise que les autres faces ont reçu un traitement antireflet. Par conséquent, lorsque les faisceaux traversent ces faces, on peut considérer que la transmission en énergie se fait quasiment à 100 % (en réalité, il existe une légère perte d'énergie au niveau de ces faces qui sera donc comptabilisée dans le résultat de la mesure).

- Liste du matériel requis

Il faut :

- un laser He-Ne ;
- un capteur optique et son appareillage de mesure associé (par exemple un multimètre qui mesure une grandeur proportionnelle au flux lumineux reçu par le capteur).

Remarque : en toute rigueur, il faut privilégier l'usage d'un laser polarisé car les coefficients de réflexion de la séparatrice pour une lumière polarisée dans le plan d'incidence sont différents de ceux d'une lumière polarisée perpendiculairement à ce plan.

- Protocole retenu

Le capteur ne donne accès qu'à une grandeur qui est proportionnelle à l'intensité lumineuse reçue. Il faut être capable de mesurer séparément l'« image » de la quantité I_0 donnée par le capteur pour pouvoir ensuite en déduire RT.

Hidden page

Diffraction à l'infini. Réseaux de diffraction

Introduction

Nous avons déjà rencontré le phénomène de diffraction aux chapitres 2 et 3 en étudiant les interférences données par l'interféromètre de Young. C'est en effet la diffraction des ondes par les trous ou fentes de Young qui permet à deux faisceaux d'interférer, le phénomène de diffraction modulant celui d'interférence. Nous nous proposons d'étudier d'abord isolément le phénomène de diffraction puis d'interpréter quantitativement les résultats obtenus avec les fentes de Young. Enfin, en associant un grand nombre de ces fentes, on crée un réseau de diffraction dont nous montrerons l'intérêt pour l'analyse spectrale de la lumière.

Nous verrons aussi que la diffraction est un phénomène physique de poids dans le monde contemporain car elle affecte tous les instruments optiques et réduit leurs capacités, alors que la lumière est de plus en plus utilisée dans le transport de l'information (fibre optique) et dans son stockage (mémoire optique).

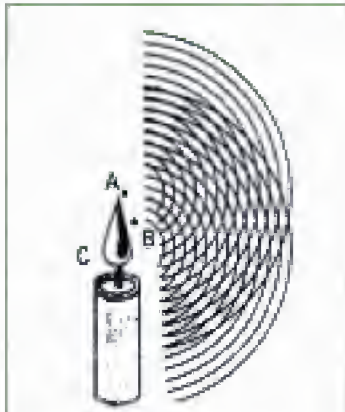
Plan du chapitre 6

A. Le phénomène de diffraction	234
B. Diffraction à l'infini ou de Fraunhofer	238
C. Réseaux de diffraction	252
<i>Méthodes</i>	
L'essentiel ; mise en œuvre	259
<i>Énoncés des exercices</i>	265
<i>Indications</i>	268
<i>Solutions des exercices</i>	269

Hidden page

1. La diffraction des ondes acoustiques est plus facile à mettre en évidence puisque la longueur d'onde peut être de l'ordre du mètre.

2. Ainsi, pour une fente de largeur $b = 0,3 \text{ mm}$ placée à la distance $D = 3 \text{ m}$ de l'écran, la largeur de la tache centrale est de l'ordre du cm et $\theta \approx 0,1^\circ$ (figure 1).



« Mais il faut considérer encore plus particulièrement l'origine de ces ondes et la manière dont elles s'étendent. Et premièrement, il s'ensuit de ce qui a été dit de la production de la lumière, que chaque petit endroit d'un corps lumineux, comme le Soleil, une chandelle, ou un charbon ardent, engendre ses ondes, dont cet endroit est le centre. Ainsi, dans la flamme d'une chandelle, étant distingués les points A,B,C, les cercles concentriques décrits autour de chacun de ces points représentent les ondes qui en proviennent. Et il faut en concevoir de même autour de chaque point de la surface et d'une partie du dedans de cette flamme... »
C.Huygens, *Traité de la lumière*.

Fig. 3 Illustration et texte du traité de Huygens.

La diffraction, comme les interférences, met en évidence le caractère ondulatoire de la lumière¹.

Enfin, l'exploitation numérique de l'expérimentation décrite à la figure 1 permet de vérifier que la tache centrale a pour largeur angulaire :

$$2\theta \approx \frac{2\lambda_0^2}{b}$$

Cette relation montre bien l'importance du rapport entre la longueur d'onde de l'onde lumineuse et la dimension de l'objet diffractant pour le phénomène de diffraction.

La lumière étant une onde électromagnétique, la théorie de Maxwell devrait suffire pour expliquer ces observations. En effet, nous disposons de l'équation de propagation de d'Alembert, des conditions initiales et des conditions aux limites ; hélas, les calculs sont inextricables et, même si cette branche de l'optique, dite optique-électromagnétique, a progressé, nous utiliserons le principe de Huygens-Fresnel pour obtenir l'intensité de l'onde diffractée par un obstacle.

A.2. Le principe de Huygens-Fresnel

A.2.1 – Sources secondaires de Huygens

Huygens est à l'origine d'une approche physique de la propagation des ondes (*Traité de la lumière*, 1690) (figure 3) et d'un principe qui porte son nom énonçant que :

Principe d'Huygens

Lors de la propagation d'une onde émise par une source primaire, tout point atteint par l'onde lumineuse se comporte comme une source ponctuelle, dite **source secondaire**, rayonnant une onde sphérique identique à celle que crée la source primaire en ce point secondaire. Chaque onde sphérique secondaire est appelée « ondelette ».

La surface d'onde Σ à une date ultérieure est l'enveloppe de toutes les surfaces d'onde créées par ces sources secondaires (figures 4 et 5).

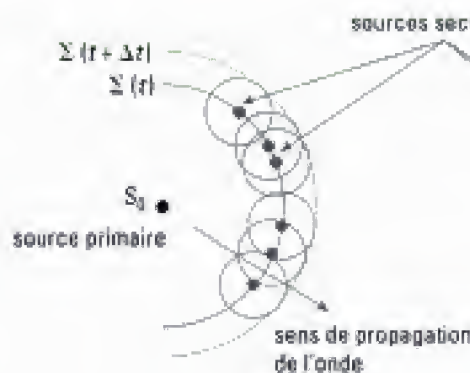


Fig. 4 – Propagation d'une onde sphérique selon Huygens.

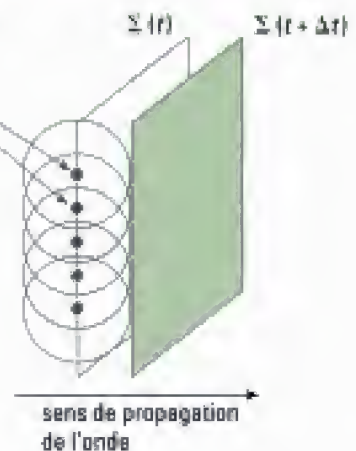


Fig. 5 – Propagation d'une onde plane selon Huygens.

Cette approche intuitive et ce principe sont assez féconds : nous pouvons ainsi approcher la notion de diffraction.

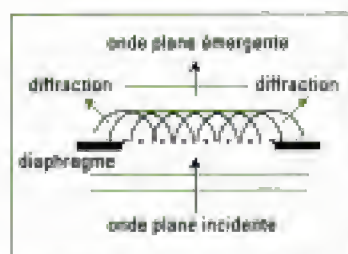


Fig. 6 – Passage d'une onde plane par un diaphragme : propagation rectiligne et diffraction.

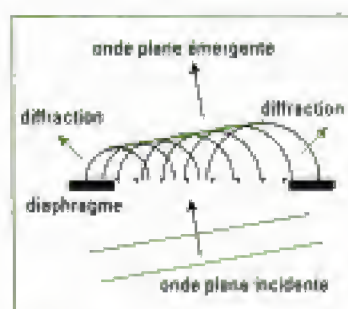


Fig. 7 – La surface portant les sources secondaires n'est pas forcément une surface d'onde comme le montre ce cas. Les sources secondaires sont déphasées dans ce cas de figure.

1. On aura reconnu ici le principe d'interférence de Young (1802) (cf. chapitre 2 paragraphe A).

Dans les figures 6 et 7, les ondelettes émises au-delà du diaphragme permettent à l'onde de se propager dans une région qui ne correspond pas à celle prévue par l'optique géométrique. En quelque sorte, les ondes secondaires ne s'équilibrent plus dans la partie qui donne lieu à diffraction. Au centre du diaphragme, par contre, la contribution des ondelettes voisines assure à l'onde la propagation rectiligne (figure 6).

A.2.2 – Le principe de Huygens-Fresnel

Le principe de Huygens donne une approche grossière de la notion de diffraction et permet de prendre en compte un paramètre déterminant : la *taille de l'obstacle*. Cependant il ne tient pas compte de l'autre paramètre déterminant : la *longueur d'onde*.

Fresnel, en 1818, a étendu le principe de Huyghens à la diffraction en tenant compte de l'*interférence des ondes secondaires* entre elles, supposées cohérentes, chacune étant émise par l'élément de surface dS qui entoure le point P origine de l'onde secondaire, l'amplitude et la phase en P étant celles de l'onde que reçoit ce point depuis la source primaire S_0 (figure 8).

Considérons un milieu linéaire, homogène, isotrope et transparent dans lequel une source ponctuelle S_0 , dite primaire, rayonne une onde lumineuse monochromatique de pulsation ω .

Principe de Huygens-Fresnel

Chaque point P d'une surface (S) atteinte par la lumière de la source primaire peut être considéré comme une **source lumineuse secondaire**, ponctuelle et fictive, émettant une onde sphérique, ou ondelette, d'amplitude en P proportionnelle :

- à celle de l'onde incidente primaire qui atteint ce point ;
- à l'élément de surface dS entourant le point P .

Les sources secondaires sont cohérentes et les différentes ondelettes émises interfèrent entre elles¹.

A.3. Application du principe de Fresnel au cas d'une pupille

Nous supposons que la source primaire S_0 et le point M où l'on observe la

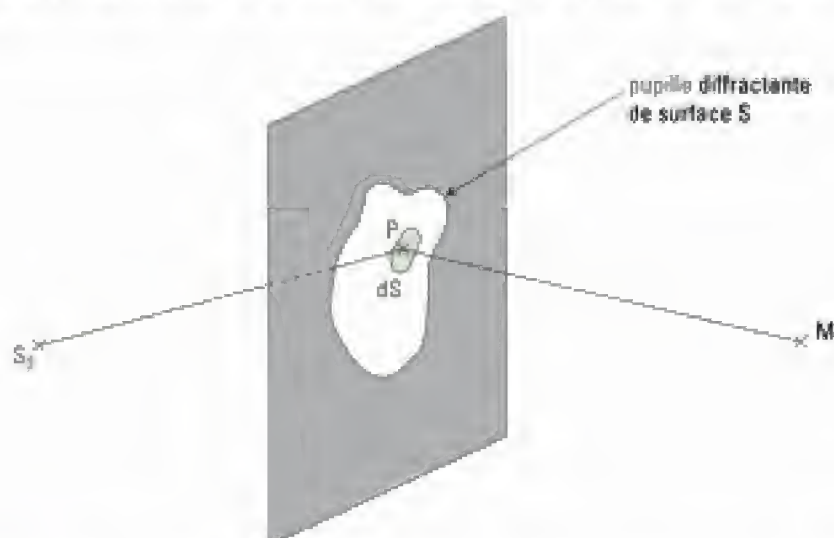


Fig. 8 – Pupille diffractante de surface S : source primaire S_0 , source secondaire P .

diffraction sont à distance finie et que la pupille est entourée d'air d'indice $n = 1$ (figure 8).

Il est tout à fait possible d'écrire le principe de Huygens-Fresnel en tenant compte de la nature vectorielle de l'onde lumineuse et des effets dus à la polarisation. Ce principe contient la notion d'interférences lumineuses, aussi, nous supposons réalisées les conditions de l'approximation scalaire (cf. chapitre 2 paragraphe D)¹.

Ainsi, selon ce principe, l'amplitude complexe instantanée créée au point P par la source d'onde sphérique primaire S_0 est² (cf. chapitre 1 paragraphe B.3) :

$$\underline{E}_{S_0}(P, t) = A \frac{\exp[j(\omega t - k_0 S_0 P)]}{S_0 P}$$

où A est une constante et $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$,

L'amplitude complexe diffractée instantanée créée en M par la source secondaire située en P est, d'après le principe de Huygens-Fresnel :

$$d\underline{E}_P(M, t) = K' \underline{E}_{S_0}(P, t) \frac{\exp(-jk_0 PM)}{PM} dS,$$

soit encore :

$$d\underline{E}_P(M, t) = K' A \frac{\exp[j(\omega t - k_0 S_0 P)]}{S_0 P} \frac{\exp(-jk_0 PM)}{PM} dS.$$

Le coefficient de proportionnalité K' dépend *a priori* de la position des points S_0 , P et M. Nous admettons ici que K' peut être considéré comme constant sous certaines conditions que nous préciserons au paragraphe suivant.

Le principe d'interférence de Young, présent dans le principe de Huygens-Fresnel, et la condition de cohérence des sources secondaires nous permettent de sommer les amplitudes complexes instantanées en M, dues aux différents points P de l'ouverture. Nous avons donc :

$$\underline{E}(M, t) = \iint_{(S)} d\underline{E}_P(M, t) = K' \iint_{(S)} A \frac{\exp[j(\omega t - k_0 S_0 P)]}{S_0 P} \frac{\exp(-jk_0 PM)}{PM} dS.$$

Or, le principe de Fresnel donne des résultats erronés si l'on cherche à calculer la phase de l'ondelette³. Ceci est sans importance puisque nous n'aurons à exprimer que des différences de phase entre ondelettes et que nous calculerons des intensités lumineuses par produit des amplitudes complexes conjuguées.

Aussi, nous pouvons ne conserver que l'amplitude complexe de la vibration lumineuse en M, soit :

$$\underline{E}_m(M) = \iint_{(S)} d\underline{E}_m(M) = K' \iint_{(S)} A \frac{\exp(-jk_0 S_0 P)}{S_0 P} \frac{\exp(-jk_0 PM)}{PM} dS.$$

Nous remarquons que le principe de Huygens-Fresnel prend en compte une superposition d'ondes dues à une infinité de sources secondaires, dont la distribution est continue, ce qui justifie le passage à l'intégration. Cette situation, identique sur le principe de la sommation, est par contre différente de celle des interféromètres rencontrés, du type Young ou Michelson, où la sommation ne portait que sur deux ondes seulement.

1. Cette approximation est vérifiée sur une situation particulière comme celle de la diffraction à l'infini que nous aborderons.

2. Comme pour les interférences, on trouve indifféremment les notations E, a, s, ou Ψ pour la vibration lumineuse. En concordance avec les chapitres concernant les interférences, nous conserverons la notation E.

3. À une distance grande de la source, à l'échelle de la longueur d'onde, la vibration émise par la source secondaire a une avance de phase de $\frac{\pi}{2}$ sur la source secondaire (ceci a été vérifié sur les ondes scalaires acoustiques). De même, il faudrait prévoir une onde de retour, par exemple en figure 4, onde qui n'existe pas dans la réalité.

B. Diffraction à l'infini ou de Fraunhofer¹

B.1. Diffraction à l'infini et principe de Huygens-Fresnel

Définition 3

La diffraction à l'infini, ou de Fraunhofer, est observable lorsque la source et l'écran d'observation sont très éloignés de la pupille diffractante de sorte qu'on les considère à l'infini.

Typiquement, la position à l'infini correspond aux inégalités :

$$S_0P \gg d_c \text{ et } PM \gg d_c,$$

où d_c est une distance caractéristique du système optique, ici la plus grande distance entre deux points de la pupille.

Cette situation physique assure le caractère constant (ou quasi-constant) du facteur de proportionnalité K' déjà rencontré car, vu depuis l'infini, les sources secondaires sont situées dans un voisinage angulaire très petit et ont donc toutes la même contribution.

• La source S_0 est à l'infini

Dans ce cas, la source S_0 émet une onde plane incidente sur la pupille, d'expression $\underline{E}_m = E_m \exp(-jk_0 S_0P)$ (figure 9). Cette expression vient se substituer à celle de l'onde sphérique précédente et nous obtenons :

$$\underline{E}_m(M) = \iint_{(S)} d\underline{E}_m(M) = K' \iint_{(S)} E_m \exp(-jk_0 S_0P) \frac{\exp(-jk_0 PM)}{PM} dS \quad (1).$$

• L'écran est à l'infini

Dans ce cas, les ondes émises par les sources secondaires et reçues par l'écran sont quasi-planes et pour un point M donné de l'écran, le faisceau reçu est quasi parallèle. Nous réalisons ici les conditions définies au chapitre 2 et qui permettent d'utiliser l'approximation scalaire. Avec une bonne approximation, nous pouvons poser que $PM = cte$. En associant cette dernière constante

avec la constante K' , et en posant $K = \frac{K'}{PM}$, la relation s'écrit (1) :

$$\underline{E}_m(M) = K E_m \iint_{(S)} \exp(-jk_0 S_0P) \exp(-jk_0 PM) dS$$

qui traduit le principe de Huygens-Fresnel dans les conditions de Fraunhofer.

• Forme opérationnelle du principe de Huygens-Fresnel dans les conditions de Fraunhofer

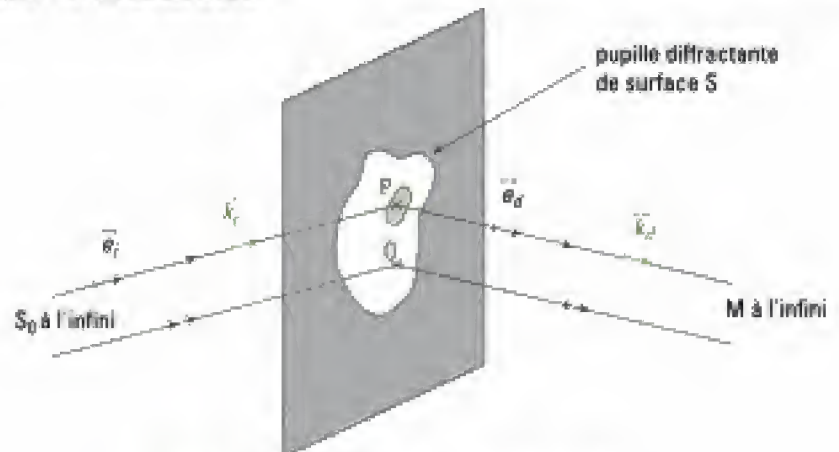


Fig. 9 – Diffraction à l'infini par une pupille.

Introduisons une origine O des espaces sur la pupille ainsi que les vecteurs d'onde $\vec{k}_i = k_0 \vec{e}_i$ pour l'onde incidente et $\vec{k}_d = k_0 \vec{e}_d$ pour l'onde émergente (figure 9). Exprimons maintenant les retards de phase $k_0 S_0 P$ et $k_0 PM$ en fonction de cette origine. Il vient :

$$k_0 S_0 P = \vec{k}_i \cdot \overrightarrow{S_0 P} = \vec{k}_i \cdot \overrightarrow{S_0 O} + \vec{k}_i \cdot \overrightarrow{OP} = k_0 S_0 O + \vec{k}_i \cdot \overrightarrow{OP}.$$

De même :

$$k_0 PM = \vec{k}_d \cdot \overrightarrow{PM} = \vec{k}_d \cdot \overrightarrow{PO} + \vec{k}_d \cdot \overrightarrow{OM} = \vec{k}_d \cdot \overrightarrow{PO} + k_0 OM.$$

L'amplitude complexe de l'onde en M devient :

$$\underline{E}_m(M) = K E_{mi} \iint_{(S)} \exp[-j(k_0 S_0 O + \vec{k}_i \cdot \overrightarrow{OP})] \exp[-j(k_0 OM + \vec{k}_d \cdot \overrightarrow{PO})] dS$$

que l'on peut réécrire sous la forme :

$$\underline{E}_m(M) = K E_{mi} \iint_{(S)} \exp[-j k_0 (S_0 O + OM)] \exp[j(\vec{k}_d - \vec{k}_i) \cdot \overrightarrow{OP}] dS.$$

$S_0 O + OM$ représente le chemin optique entre S_0 et M en passant par le point O que nous noterons $(S_0 OM)$. Le point O étant donné, ce chemin ne dépend pas de l'élément de surface dS .

Nous obtenons donc l'expression du principe de Huygens appliqué à une pupille diffractante dans les conditions de la diffraction à l'infini :

$$\underline{E}_m(M) = K E_{mi} \exp[-j k_0 (S_0 OM)] \iint_{(S)} \exp[j(\vec{k}_d - \vec{k}_i) \cdot \overrightarrow{OP}] dS$$

Remarques :

1. Le facteur devant l'intégrale a peu d'importance en pratique car :
– nous nous intéressons à l'intensité I ;
– nous nous intéressons à la variation de I et non à sa valeur.

2. Ce fait est aussi lié à la nature de l'intégrale qui donne $\underline{E}_m(M)$. Elle dépend des composantes du vecteur $\vec{k}_d - \vec{k}_i$ sur le plan de l'ouverture par l'intermédiaire du produit scalaire $(\vec{k}_d - \vec{k}_i) \cdot \overrightarrow{OP}$. Si ces composantes deviennent trop grandes, la contribution de ces intégrales est négligeable car les oscillations associées à l'exponentielle complexe ont une petite « période ». Cette périodicité courte est aussi une justification de l'assimilation de K' et K à des constantes puisque K' et K ont, eux, une évolution lente.

– Nous voyons que pour finir le calcul, il faudra déterminer des différences de retards de phase, ou déphasages, comme dans la première partie traitant des interférences¹.

– Dans le cas de la diffraction à l'infini par une pupille, nous avons vu expérimentalement que le phénomène de diffraction n'est significatif par ses effets que dans des directions très voisines de la position de M prévue par l'optique géométrique². Nous utiliserons donc l'*approximation des petits angles*.

B.2. Diffraction à l'infini ou de Fraunhofer : conditions expérimentales

Pour observer la diffraction à l'infini d'une pupille de faible ouverture, nous pouvons :

- Soit la placer dans le faisceau d'un laser couvrant toute la pupille et placer un écran à quelques mètres. Les qualités de la lumière laser (puissance, directivité et cohérence) permettent d'observer le phénomène de diffraction sur l'écran. Ce choix a été fait dans les relevés des figures 1 et 2. En dehors du choix de ce type de source, l'observation est difficile car peu lumineuse.
- Soit l'éclairer avec un faisceau de lumière parallèle créé par une source ponctuelle placée au foyer d'une lentille convergente (L_1) (figure 10). De la même manière, la figure de diffraction est ramenée à distance finie en l'observant dans le plan focal d'une lentille convergente (L_2). Dans une direction \vec{e}_d , les ondes diffractées convergent en un même point M sur l'écran, dont la position est donnée par le rayon non dévié parallèle à \vec{e}_d et passant par le centre optique O_2 de la lentille (L_2). La figure observée sur l'écran est celle que l'on obtiendrait en plaçant un écran à l'infini.

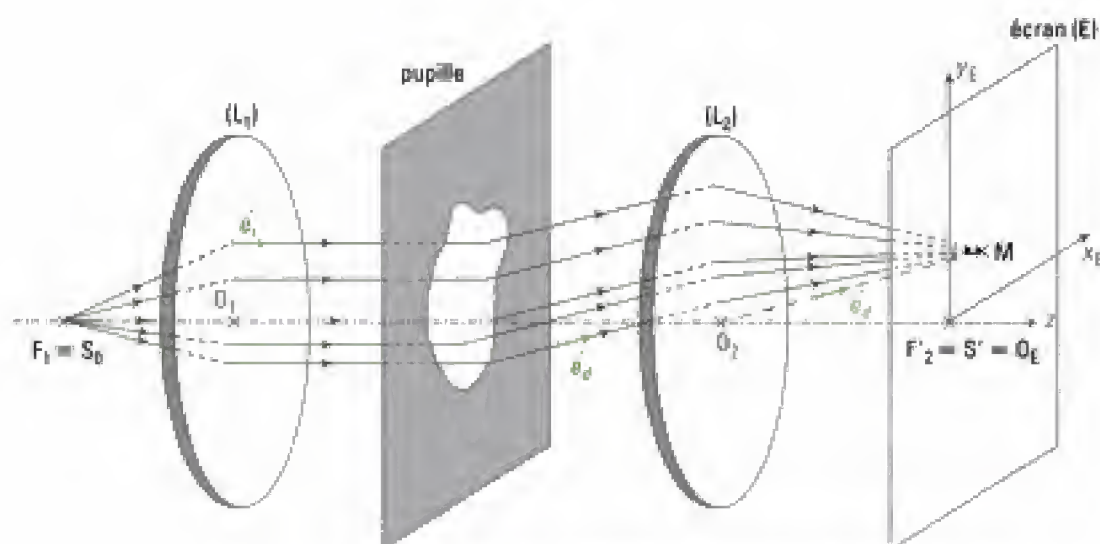


Fig. 10 – Montage d'étude de la diffraction à l'infini.

B.3. Diffraction par une pupille (ou ouverture) plane rectangulaire

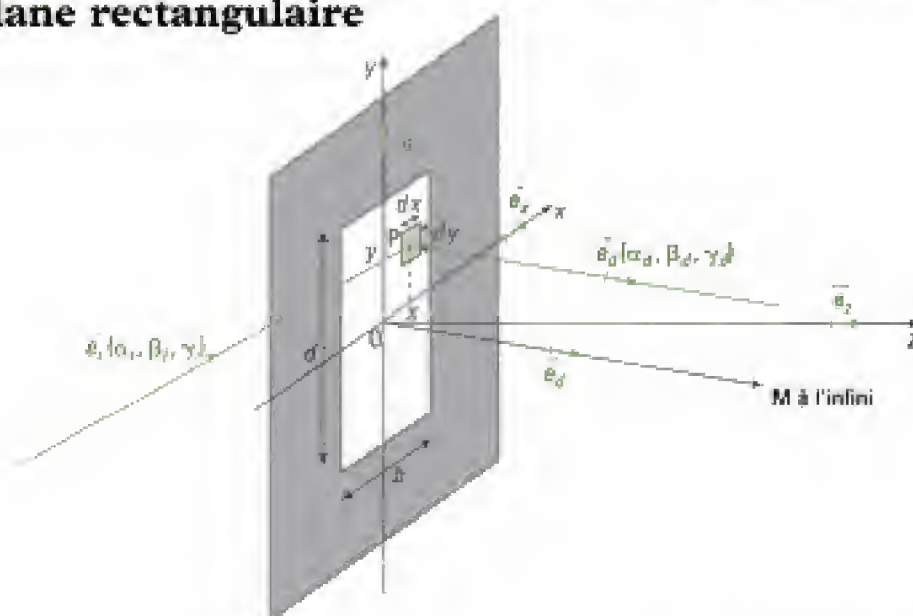


Fig. 11 – Diffraction par une pupille rectangulaire

B.3.1 – Calcul de l'amplitude et de l'intensité diffractées

Nous utilisons le résultat du paragraphe B.1. pour un point M de l'écran recevant le faisceau diffracté par la pupille rectangulaire. Ainsi :

$$\underline{E}_m(M) = K E_{m_i} \exp[-jk_0(S_0 OM)] \iint_{(S)} \exp[j(\vec{k}_d - \vec{k}_i) \cdot \vec{OP}] dS$$

Comme indiqué précédemment, nous devons exprimer le terme de retard de phase avec $\vec{OP} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$ et $\vec{k}_d = k_0\vec{e}_d = k_0(\alpha_d\vec{e}_x + \beta_d\vec{e}_y + \gamma_d\vec{e}_z)$, en appelant α_d, β_d et γ_d les composantes du vecteur \vec{e}_d sur la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ ¹.

De même, $\vec{k}_i = k_0\vec{e}_i = k_0(\alpha_i\vec{e}_x + \beta_i\vec{e}_y + \gamma_i\vec{e}_z)$.

Le développement du produit scalaire étant effectué, nous obtenons :

$$\underline{E}_m(M) = K E_{m_i} \exp[-jk_0(S_0 OM)] \iint_{(S)} \exp[jk_0[(\alpha_d - \alpha_i)x + (\beta_d - \beta_i)y]] dx dy.$$

1. On dit aussi « cosinus directeurs » du vecteur \vec{k}_d .

Les variables étant indépendantes, il vient :

$$\underline{E}_m(M) = K E_m \exp[-jk_0(S_0 OM)] \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \exp[jk_0(\alpha_d - \alpha_i)x] dx \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \exp[jk_0(\beta_d - \beta_i)y] dy$$

qui conduit à :

$$\underline{E}_m(M) = K E_m \exp[-jk_0(S_0 OM)] \left[\frac{\exp[jk_0(\alpha_d - \alpha_i)x]}{jk_0(\alpha_d - \alpha_i)} \right]_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \left[\frac{\exp[jk_0(\beta_d - \beta_i)y]}{jk_0(\beta_d - \beta_i)} \right]_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}}$$

soit encore :

$$\underline{E}_m(M) = K E_m \exp[-jk_0(S_0 OM)] \left[\frac{2j \sin \left[\frac{k_0(\alpha_d - \alpha_i)b}{2} \right]}{jk_0(\alpha_d - \alpha_i)} \right] \left[\frac{2j \sin \left[\frac{k_0(\beta_d - \beta_i)d}{2} \right]}{jk_0(\beta_d - \beta_i)} \right]$$

En utilisant la fonction sinus cardinal de x telle que $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ et

$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$, nous obtenons :

$$\underline{E}_m(M) = K b d E_m \exp[-jk_0(S_0 OM)] \text{sinc} \left[\frac{\pi(\alpha_d - \alpha_i)b}{\lambda_0} \right] \text{sinc} \left[\frac{\pi(\beta_d - \beta_i)d}{\lambda_0} \right].$$

Nous en déduisons l'expression de l'intensité lumineuse dans la direction $(\alpha_d, \beta_d, \gamma_d)$:

$$I(\alpha_d, \beta_d) = \underline{E}_m \underline{E}_m^* = K^2 b^2 d^2 E_m^2 \text{sinc}^2 \left[\frac{\pi(\alpha_d - \alpha_i)b}{\lambda_0} \right] \text{sinc}^2 \left[\frac{\pi(\beta_d - \beta_i)d}{\lambda_0} \right].$$

Nous posons alors $K^2 b^2 d^2 E_m^2 = I_0$. L'intensité s'écrit donc :

$$I(\alpha_d, \beta_d) = I_0 \text{sinc}^2 \left[\frac{\pi(\alpha_d - \alpha_i)b}{\lambda_0} \right] \text{sinc}^2 \left[\frac{\pi(\beta_d - \beta_i)d}{\lambda_0} \right].$$

Classiquement, on pose aussi $u = \frac{\pi(\alpha_d - \alpha_i)b}{\lambda_0}$ et $v = \frac{\pi(\beta_d - \beta_i)d}{\lambda_0}$. Alors :

$$I(u, v) = I_0 \text{sinc}^2(u) \text{sinc}^2(v).$$

B.3.2 – Interprétation physique

Le graphe de la fonction $\text{sinc}^2(u)$ est tracé à la figure 12. L'allure du graphe de la fonction $\text{sinc}^2(v)$ est bien sûr la même, aussi nous étudierons les variations de l'intensité lumineuse en fonction de la variable u , celles en fonction de v s'en déduisant directement.

- La courbe $\text{sinc}^2(u)$ (figure 12) admet un maximum si $u = 0$, ce qui correspond à une absence de déviation du faisceau incident et à une propagation rectiligne de la lumière.

Dans le cas du montage à deux lentilles de la figure 10, le point M de maximum d'éclairement est alors le point S', image du point source S_0 donnée par le système des deux lentilles. Ce maximum d'intensité est directement liée aux interférences des sources secondaires qui sont en phase en ce point M.

Dans les conditions de diffraction à l'infini, l'intensité est **maximale** dans la direction de l'image géométrique de la source. Ce maximum est qualifié de **principal** ou **central**.

Hidden page

Hidden page

Remarque :

L'analyse de l'expression de l'intensité montre que si l'on modifie une des dimensions de la pupille d'un facteur h , par exemple si la dimension d devient hd , la figure de diffraction est modifiée d'un facteur $\frac{1}{h}$; par exemple $\frac{\lambda f'_2}{d}$ devient $\frac{\lambda f'_2}{dh}$.

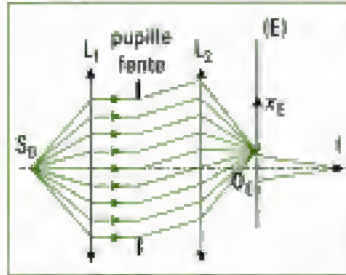


Fig. 15 – Montage d'étude de la diffraction à l'infini par une pupille fente.

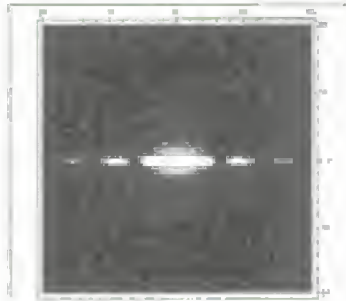


Fig. 16 – Figure de diffraction obtenue avec une fente de hauteur égale à cent fois sa largeur : $d = 100 b$. Le phénomène de diffraction se situe quasiment dans la direction horizontale. L'influence de la hauteur de la fente n'est perceptible que très près de cette direction horizontale.

B.4. Cas de la pupille fente

Le montage d'étude est celui représenté à la figure 15. Dans le cas de la pupille fente, une des dimensions de la fente rectangulaire est très supérieure à l'autre.

Prenons le cas où $d \gg b$. La fente est donc allongée selon Oy. La remarque du paragraphe précédent nous permet de comprendre que le phénomène de diffraction dû aux bords parallèles à Ox est concentré au centre de la figure de diffraction ($\alpha_i = \alpha_o$ et $\beta_i = \beta_o$), et que la figure de diffraction de la pupille se concentre donc sur l'écran au voisinage de la droite $O_E x_E$ (figures 10, 14 et 16). La fente est dite infiniment longue dans la direction Oy.

Nous pouvons alors négliger la diffraction due à la dimension d de la fente dans la direction $O_E y_E$.

Le calcul complet de l'intensité donnée par une fente fine, dont nous ne donnons ici que le résultat, est détaillé à la méthode 1 :

$$I(x_E) = I_0 \operatorname{sinc}^2 \left[\frac{\pi b}{\lambda_0 f'_2} x_E \right]$$

avec $I_0 = K^2 b^3 d^2 E_{inc}^2$.

En considérant toujours l'incidence normale, le coefficient α_o se met sous la forme $\sin(\theta)$ avec θ l'angle entre la normale à l'ouverture et la direction d'observation (cf. figure 1 ou 10). L'intensité s'écrit alors :

$$I(\theta) = I_0 \operatorname{sinc}^2 \left[\frac{\pi b \sin(\theta)}{\lambda_0} \right]$$

Dans l'approximation des petits angles, $\sin(\theta) \approx \theta$. Cette dernière relation peut donc s'écrire :

$$I(\theta) = I_0 \operatorname{sinc}^2 \left[\frac{\pi b \theta}{\lambda_0} \right]$$

Remarque :

Les cosinus directeurs α_o et β_o du vecteur \vec{k}_o s'obtiennent immédiatement :

$$\alpha_o = \sin(\theta) \text{ et } \beta_o = 0$$

car il n'y a pas de diffraction dans la direction Oy.

Dans le cas de la diffraction par une fente « infinie », il est fréquent d'utiliser l'angle θ comme variable à la place de α_o . En effet, l'angle θ peut facilement être visualisé, et comme il est petit, nous avons immédiatement :

$$\sin(\theta) \approx \theta \text{ et } \tan(\theta) \approx \theta.$$

Dans le cas d'une diffraction dans les deux dimensions, il faut revenir à la relation générale vue précédemment.

Application 1 Exploitation qualitative de figures de diffraction données par une fente fine

Pour chaque relevé ci-dessous, on donne la largeur b de la fente et la couleur de la radiation monochromatique qui l'éclaire. Interpréter qualitativement.



Fig. a - $b = 0,25$ mm ; vert

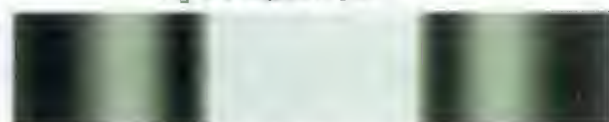


Fig. b - $b = 0,5$ mm ; vert



Fig. c - $b = 0,5$ mm ; bleu (430 nm)

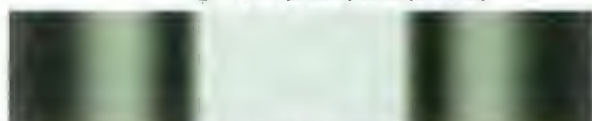


Fig. d - $b = 0,5$ mm ; vert (540 nm)

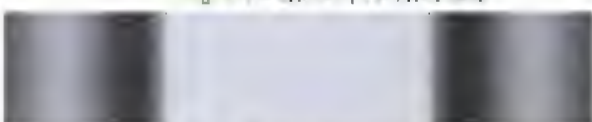


Fig. e - $b = 0,5$ mm ; rouge (700 nm)

Solution

- Les figures a et b permettent de vérifier que la largeur du maximum central est inversement proportionnelle à la largeur b de la fente fine.
- Les figures c, d et e permettent de vérifier la dépendance de la largeur du maximum central à la longueur d'onde λ_0 : les rapports des largeurs des pics centraux sont comparables aux rapports des longueurs d'onde.

1. La difficulté est liée à la forme de la surface et non à la fonction à intégrer.



Fig. 17.a – Figure de diffraction donnée par une ouverture circulaire.



Fig. 17.b – Figure de diffraction donnée par une ouverture circulaire ; élévation montrant l'évolution du niveau de l'intensité lumineuse.

B.5. Diffraction par une pupille (ou ouverture) circulaire

Ce cas est particulièrement important car les systèmes optiques sont des systèmes centrés. Les lentilles montées sur leurs supports vont se comporter comme des ouvertures circulaires qui diffractent la lumière. Par contre, les calculs de l'amplitude diffractée dans une direction et de l'intensité correspondante sont nettement plus compliqués puisqu'on doit utiliser les fonctions de Bessel¹. Aussi, conformément au programme, nous nous contenterons de donner l'allure de la figure de diffraction à l'infini.

Pour une pupille circulaire de rayon R , la figure de diffraction, dont la tache centrale est appelée **tache d'Airy**, que nous avons déjà rencontrée dans l'expérience des trous de Young (cf. chapitre 3 paragraphe B.2.), présente les caractéristiques suivantes (figure 17.a) :

- la figure de diffraction a la symétrie de révolution de l'ouverture qui la crée ;
- on observe essentiellement une tache centrale brillante (tache d'Airy) qui concentre l'essentiel de l'intensité lumineuse dans un cône de demi-angle au

sommet égal à $\theta = 1,22 \frac{\lambda_0}{2R}$ (figure 17.b). Cette expression prend une forme

analogue à celles obtenues pour une fente rectangulaire de dimensions b et d ($\frac{\lambda_0}{b}$ et $\frac{\lambda_0}{d}$) : elle est inversement proportionnelle à la dimension transversale de la pupille ;

- cette tache centrale est bordée d'anneaux circulaires alternativement sombres et brillants, peu lumineux.

B.6. Approximation de l'optique géométrique

Dans les cas de diffraction rencontrés, si la distance caractéristique d_c du dispositif diffractant ($b, d, 2R \dots$) est très supérieure à la longueur d'onde λ_0 de l'onde incidente sur ce dispositif, alors l'angle de diffraction θ est très petit. Dans ce cas, la lumière se propage quasiment en ligne droite. Nous retrouvons l'approximation de l'optique géométrique vue en première année.

Si $d_c \gg \lambda_0$, les conditions de l'optique géométrique sont réunies.

B.7. Importance de la diffraction à l'infini dans la formation des images

Considérons un système optique parfait, c'est-à-dire dénué des défauts optiques étudiés dans le cours de première année, et intéressons nous seulement au phénomène de diffraction créé par ce système.

L'utilisateur souhaite obtenir un point image d'un point objet à l'aide du système optique (lunette, appareil photographique, caméra, microscope, télescope...). Ce système, supposé stigmatique avec les hypothèses précédentes, ne donnera pas un point image mais une tache image autour du point image stigmatique. En effet, les montures des lentilles et des miroirs sont des pupilles la plupart du temps de forme circulaire qui, en conséquence, diffractent la lumière reçue.

1. Comme vu précédemment, nous pouvons confondre la tache de diffraction circulaire avec la tache d'Airy.

Il n'est donc pas possible d'obtenir un point image dont la taille soit inférieure à la tache de diffraction donnée par l'ouverture limitant le faisceau¹.

2. À ce sujet, voir l'exercice 1 de ce chapitre.

Cette question est extrêmement importante pour l'industrie car la diffraction limite les applications utilisant la lumière, qui sont de plus en plus courantes (lecteur de CD, capteurs CCD²).

• Limitation fondamentale

En utilisant cet instrument, il est impossible de distinguer deux points objets si leurs images se chevauchent et se confondent. L'instrument ne *sépare* alors plus les taches images : cette séparation dépasse son *pouvoir de résolution* (il ne peut résoudre cette unique tache en deux taches séparées). La diffraction est une cause de cette limite de résolution.

• Limite de résolution d'un instrument

Considérons l'instrument simplifié représenté en figure 18, composé d'une simple lentille (L) convergente et de sa monture, de diamètre $D = 2R$, de distance focale f' , qui permet d'observer deux étoiles A_∞ et B_∞ situées à l'infini, dont les images se forment dans le plan focal qui est le plan d'observation (figure 18).

Les bords de la lentille, ou ceux de la monture, de forme circulaire, diffractent la lumière reçue et chaque point objet donne une tache image de diamètre :

$$2 \times 1,22 \frac{\lambda_0 f'}{D}.$$

Les deux étoiles étant des sources incohérentes, supposées de même fréquence, les intensités lumineuses s'ajoutent si les taches se recouvrent. Il peut donc y avoir fusion des deux images : **le pouvoir de résolution est limité par la diffraction**. Le critère de Rayleigh stipule que dans le cas de deux taches de diffraction d'intensités comparables, l'œil cesse de les résoudre quand le pied d'un pic principal coïncide avec le sommet de l'autre pic principal.

1. Ce critère est remplacé dans l'optique moderne par la notion de fonction de transfert de modulation (FTM) qui inclut toutes les limites de la lentille.

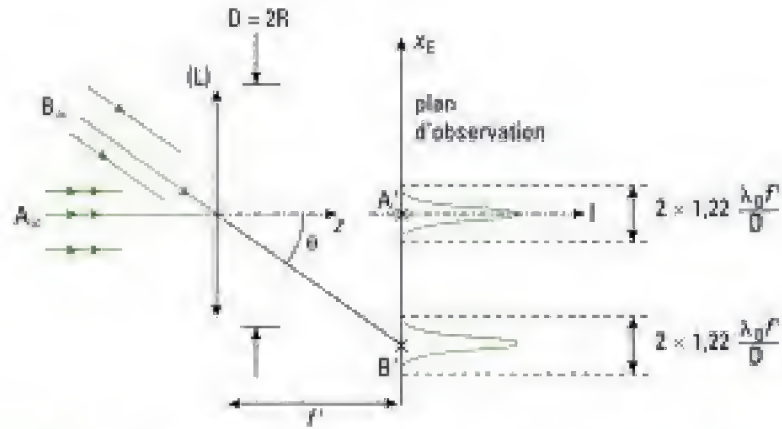


Fig. 18 -- Instrument d'optique simplifié : limitation du pouvoir de résolution due à la diffraction.

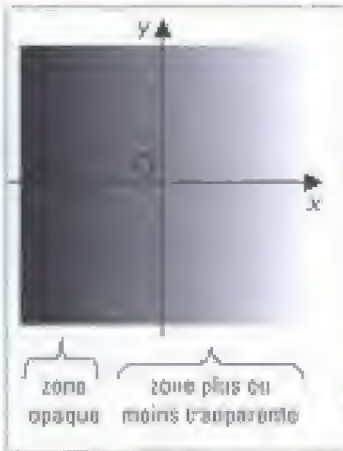


Fig. 19 – Diaphragme d'amplitude.

Ce critère¹ appliqué à cet instrument nous indique que l'on ne peut séparer deux étoiles que si :

$$\theta > \theta_0 = 1,22 \frac{\lambda}{D}.$$

Remarquons que si D est grand, la tache de diffraction est réduite. C'est une raison supplémentaire pour fabriquer par exemple des miroirs de télescope de grands diamètres. Notons aussi l'influence de la longueur d'onde sur la largeur de la tache de diffraction.

Le pouvoir séparateur peut être amélioré en utilisant un diaphragme de phase ou d'amplitude.

B.8. Diaphragme de phase – Diaphragme d'amplitude

Nous avons considéré jusqu'à présent que la pupille n'a pas d'action sur l'amplitude de l'onde qui, pour les points de l'ouverture, est supposée être la même juste avant le diaphragme et juste après le diaphragme (la pupille laisse passer l'onde par l'ouverture et elle l'arrête par sa partie opaque). Il existe des cas d'ouverture agissant de manière plus nuancée (figures 19 et 20).

Définition 4

Le **facteur de transmission complexe** $t(P)$ d'un diaphragme est le rapport des amplitudes complexes de l'onde juste après et juste avant le diaphragme. Si la propagation de l'onde incidente a lieu selon l'axe Oz , alors :

$$t(P) = t(x, y) = \frac{E_m(x, y, z = 0^+)}{E_m(x, y, z = 0^-)}$$

$$\Leftrightarrow E_m(x, y, z = 0^+) = t(x, y) E_m(x, y, z = 0^-).$$

Classiquement, on range les diaphragmes en deux catégories.

Les **diaphragmes d'amplitude**, ont un facteur de transmission tel que :

$$t(P) = t(x, y) = \rho(x, y) \text{ est un réel positif.}$$

Par exemple, pour la figure 19, $t(x, y) = K$, avec K une constante réelle positive.

Les **diaphragmes de phase**², ont un facteur de transmission tel que :

$$t(P) = t(x, y) = \exp(-j \Phi(x, y)) \text{ est un complexe.}$$

2. La forme la plus générale du facteur de transmission est bien sûr :
 $t(x, y) = \rho(x, y) \exp(-j \Phi(x, y)).$

Hidden page

Hidden page

$$\begin{aligned}
 \underline{E}_{m1}(M) &= K d \underline{E}_{m1} \exp[-jk_0(S_0 O_1 M)] \int_{\text{fente 1}} \exp(jk_0 \theta x) dx \\
 &= K d \underline{E}_{m1} \exp[-jk_0(S_0 O_1 M)] \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \exp(jk_0 \theta x) dx \\
 &= K d \underline{E}_{m1} b \exp[-jk_0(S_0 O_1 M)] \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi \theta b}{\lambda_0}\right).
 \end{aligned}$$

• De même, pour la seconde fente :

$$\begin{aligned}
 \underline{E}_{m2}(M) &= K d \underline{E}_{m2} \exp[-jk_0(S_0 O_2 M)] \int_{\text{fente 2}} \exp(jk_0 \theta x) dx \\
 &= K d \underline{E}_{m2} b \exp[-jk_0(S_0 O_2 M)] \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi \theta b}{\lambda_0}\right).
 \end{aligned}$$

• Les deux ondes diffractées se superposent en M où l'on somme la contribution des deux fentes pour obtenir l'amplitude complexe $\underline{E}_m(M)$ de l'onde diffractée :

$$\begin{aligned}
 \underline{E}_m(M) &= \underline{E}_{m1}(M) + \underline{E}_{m2}(M) \\
 &= K \underline{E}_{m1} b d \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi \theta b}{\lambda_0}\right) [\exp[-jk_0(S_0 O_1 M)] + \exp[-jk_0(S_0 O_2 M)]].
 \end{aligned}$$

$$\text{Or, } \exp[-jk_0(S_0 O_1 M)] + \exp[-jk_0(S_0 O_2 M)] = \exp[-jk_0(S_0 O_1 M)] [1 + \exp[-jk_0(S_0 O_2 M) - (S_0 O_1 M)]].$$

• La différence de marche $\delta = (S_0 O_2 M) - (S_0 O_1 M)$ est égale à :

$$O_2 H = a \sin(\theta) = a \theta \text{ (figure 23).}$$

• L'amplitude complexe de l'onde diffractée s'écrit alors :

$$\underline{E}_m(M) = K \underline{E}_{m1} b d \exp[-jk_0(S_0 O_1 M)] \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi \theta b}{\lambda_0}\right) [1 + \exp(-jk_0 a \theta)] \quad (2).$$

• Expression de l'intensité lumineuse

$$I(M) = \underline{E}_m \underline{E}_m^* = K^2 \underline{E}_{m1}^2 b^2 d^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi \theta b}{\lambda_0}\right) \left[2 + 2 \cos\left(\frac{2\pi a \theta}{\lambda_0}\right)\right].$$

• Interprétation du résultat

L'intensité lumineuse peut se mettre sous la forme :

$$I(M) = 2I_0(M) \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi a \theta}{\lambda_0}\right)\right]$$

qui traduit un phénomène d'interférences à deux ondes, chacune d'intensité :

$$I_0(M) = K^2 \underline{E}_{m1}^2 b^2 d^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi \theta b}{\lambda_0}\right)$$

qui est l'intensité diffractée en M par chacune des deux fentes¹.

L'interfrange angulaire θ_{im} des franges d'interférences est $\theta_{im} = \frac{\lambda_0}{a}$ alors que le

pic central de diffraction a pour demi-largeur angulaire $\theta_{dif} = \frac{\lambda_0}{b}$. Comme $a > b$, alors :

$$\theta_{im} < \theta_{dif}$$

Le phénomène de diffraction «module» le phénomène d'interférences.

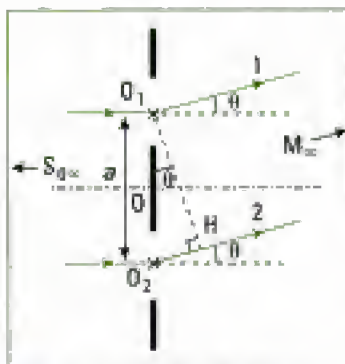


Fig. 23 – Différence de marche $O_2 H$ entre les rayons 1 et 2.

1. Tout se passe donc comme si les deux ondes diffractées étaient cohérentes. Nous étendons sans démonstration les résultats obtenus au cas de la diffraction par N pupilles identiques. L'intensité lumineuse $I(M)$ est alors le produit de l'intensité associée à la diffraction créée par une pupille, par l'intensité associée à l'interférence des N ondes émises par les pupilles, chacune d'intensité unité ($I_0 = 1$). Ainsi :

$$I(M) = I_{\text{sur 1 pupille}}(M) \times I_{\text{sur N pupilles}}(M).$$

Ceci nous permet de compléter la figure 26.a du chapitre 3 en tenant compte de la diffraction. Traçons la courbe :

$$I(\theta) = 2K^2 E_{in}^2 b^2 d^2 \text{sinc}^2\left(\frac{\pi \theta b}{\lambda_0}\right) \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi a \theta}{\lambda_0}\right)\right]$$

en parallèle de la figure « d'interférences » des fentes de Young (figure 24).

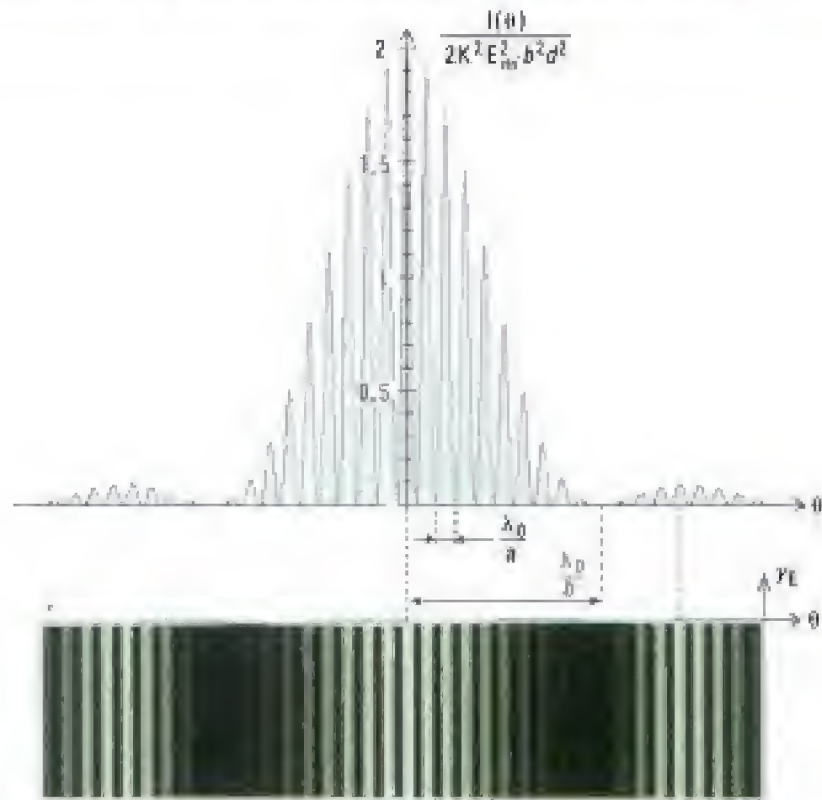


Fig. 24 – Figure d'interférences données par les fentes de Young: influence de la diffraction¹.

Ce phénomène n'est pas limité aux fentes de Young. Revoir les paragraphes A du chapitre 2 et B.2. du chapitre 3 qui, dans le cas des trous de Young, montrent la modulation interne à la tache d'Airy, due à la diffraction.

• Interfrange linéaire

Si l'on désire exprimer les différents interfranges à l'aide des coordonnées de l'écran, précisons que $x_E = f'_2 \theta$. Les interfranges s'écrivent alors :

$$i_{int} = \frac{f'_2 \lambda_0}{a} \text{ et } i_{diff} = \frac{f'_2 \lambda_0}{b} \text{ (figure 22).}$$

B.11. Éclairage des fentes de Young par une fente source de largeur variable

Nous avons déjà montré plusieurs fois que le fait d'utiliser une fente source parallèle aux fentes de Young, donc formée de sources incohérentes, permet d'observer un phénomène plus lumineux sur l'écran.

Nous considérons les fentes de Young *infinitement fines*. Dans ce cas, la largeur de la frange centrale est très grande et la *diffraction est isotrope*. L'éclairement dû à la diffraction est le même sur tout l'écran et nous retrouvons les conditions classiques d'étude des interférences qui conduisent à l'expression

$$I(M) = 2I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi a \theta}{\lambda_0}\right)\right] \text{ dans laquelle, cette fois, } I_0 \text{ est une constante.}$$

Si nous ouvrons alors progressivement la fente source, nous retrouvons l'étude menée au chapitre 3 paragraphe C.

1. Comme dans les figures 13.b et 17.a, en-dehors de la tache centrale, le contraste est augmenté pour permettre une meilleure lisibilité.

1. Cette partie est abordée en TP-cours pour les filières PC, PSI et PT.

2. L'explication de la décomposition de la lumière blanche par l'action des sillons d'un CD relève de la théorie des réseaux de diffraction.

3. Seule compte en fait la largeur éclairée.

4. Au laboratoire, on utilisera donc un goniomètre en plaçant le réseau sur la plate-forme. Cette situation est identique à celle rencontrée en première année lors de l'étude d'un autre analyseur spectral : le prisme.

C. Réseaux de diffraction¹

C.1. Conditions expérimentales

Un réseau de diffraction est une pupille composée de N pupilles diffractantes identiques régulièrement espacées d'une distance a appelée le pas du réseau. Un réseau permet une analyse spectrale de la lumière².

Nous nous limiterons aux réseaux par transmission composés de pupilles fentes, fines, longues et transparentes.

Chaque fente du réseau peut être considérée comme une source secondaire de Huygens, dont la lumière, selon Fresnel, interfère avec la lumière issue des autres fentes. **Le principe du réseau est donc basé sur les interférences à ondes multiples par division du front d'onde.**

Une donnée caractéristique du réseau est le nombre $n = \frac{1}{a}$ de « périodes »

par millimètre, ou nombre de traits par millimètre (140, 530 ou 1 020 traits par mm au laboratoire, la largeur L du réseau étant de l'ordre de 3 cm)³. Le nombre de traits $N = La$ se situe donc entre 4 000 et 30 000, ce qui est un nombre considérable.

Le montage habituel utilisant un réseau comprend une fente source fine parallèle aux traits du réseau. Cette fente est éclairée par la source dont on désire étudier le spectre. Un collimateur (ou une lentille mince convergente) donne de cette fente un faisceau parallèle qui éclaire le réseau en lumière supposée spatialement cohérente. Une lunette de visée réglée à l'infini par autocollimation (ou le plan focal d'une lentille mince convergente) permet d'observer la lumière émise par le réseau⁴ et de mesurer les angles d'émergence. Le montage schématisé est donc très proche de celui permettant l'étude des fentes de Young décrit à la figure 22, avec dans ce cas un très grand nombre de fentes. **Les conditions d'utilisation sont donc celles de Fraunhofer**

Les ondes se propageant dans l'air d'indice $n = 1$, nous supposons que le réseau diffracte la lumière dans une direction θ quand il est éclairé sous l'angle θ_i par une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ_0 .

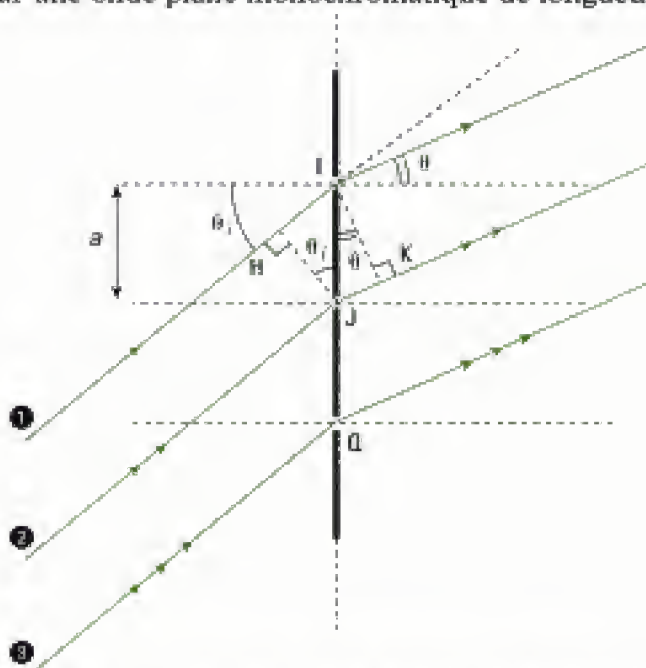


Fig. 25 – Réseau de diffraction dont on a représenté trois fentes I, J, Q et trois rayons passant par leurs centres : différence de marche entre deux fentes consécutives.

1. Dans ce paragraphe, nous considérons les fentes infiniment fines et nous exprimons la condition d'interférence constructive entre les ondelettes émises par ces fentes. Nous en déduisons la direction des maximums principaux d'intensité lumineuse. Comme nous le verrons aux paragraphes C.3 et C.4, il existe aussi des maximums secondaires.

C.2. Relation fondamentale des réseaux de diffraction par transmission¹

La différence de marche entre les parcours des rayons ② et ① (figure 25) est :

$$\delta = JK - HI = a \sin(\theta) - a \sin(\theta_i) = a(\sin(\theta) - \sin(\theta_i)).$$

Remarquons que la différence de marche entre les parcours des rayons ③ et ② est aussi égale à $a(\sin(\theta) - \sin(\theta_i))$.

Les interférences entre les ondelettes reçues à l'infini seront constructives si $\delta = m\lambda_0$, avec $m \in \mathbb{Z}$ l'ordre d'interférence. Les ondes diffractées par toutes les pupilles fentes éclairées sont alors en phase. Les directions θ_m de maximum d'intensité lumineuse sont donc données par :

$$a[\sin(\theta_m) - \sin(\theta_i)] = m\lambda_0.$$

Ou encore :

$$\sin(\theta_m) = m \frac{\lambda_0}{a} + \sin(\theta_i).$$

- Si $m = 0$, l'onde incidente se propage en ligne droite dans la direction prévue par l'optique géométrique.
- Si $m \neq 0$, la position du maximum d'intensité dépend de la longueur d'onde : le réseau de diffraction est donc un système optique dispersif.

Définition 5

Le nombre entier m est l'ordre d'interférence du maximum principal considéré, c'est aussi l'ordre de la raie (brillante) observable.

L'ordre est borné puisque $-1 \leq \sin(\theta_m) \leq 1$, ce qui conduit à :

$$-\frac{a}{\lambda_0}(1 + \sin(\theta_i)) \leq m \leq \frac{a}{\lambda_0}(1 - \sin(\theta_i))$$

et, dans le cas particulier de l'incidence normale :

$$-\frac{a}{\lambda_0} \leq m \leq \frac{a}{\lambda_0}.$$

Application 2 Détermination du nombre d'ordres observables

On éclaire un réseau comportant 140 traits par millimètre à l'aide d'un laser ($\lambda_0 = 632 \text{ nm}$) à l'incidence normale. Quels sont les ordres de maximum d'intensité théoriquement observables ?

Solution

Le pas du réseau est $a = \frac{10^{-3}}{140} \text{ m} \approx 7 \text{ } \mu\text{m}$, ce qui conduit à $-11 \leq m \leq 11$. On observera donc

23 ordres différents correspondants à des intensités maximales.

C.3. Intensité diffractée par le réseau

Comme nous l'avons indiqué, il s'agit d'interférences à ondes multiples. Numérotions les fentes de 1 à N en partant d'un bord en leur associant les rayons de même numéro (figure 25) et choisissons la fente numéro 1 comme référence des retards de phase. Remarquons que l'onde ② a un retard de

phase $\Delta\varphi = \frac{2\pi a}{\lambda_0}(\sin(\theta) - \sin(\theta_i))$ correspondant à la différence de marche

déjà calculée. L'onde numérotée ③ a un retard de phase égal à $2\Delta\varphi$ et l'onde numérotée p a un retard de phase égal à $(p - 1)\Delta\varphi$.

1. La valeur $a = 7 \mu\text{m}$ pour le pas du réseau de l'application précédente, avec somme toute un réseau à peu de traits par millimètre, conforte notre hypothèse.

Il suffit de réitérer le calcul réalisé au paragraphe B.10. pour les deux fentes de Young et de l'étendre à N fentes. Pour continuer le calcul, nous faisons l'hypothèse d'une fente très fine¹. La diffraction est donc isotrope, chaque fente émettant une onde diffractée d'amplitude réelle E_{m0} . Les amplitudes complexes successives sont alors :

$$\underline{E}_{m1} = E_{m0} ; \underline{E}_{m2} = E_{m0} \exp(-j \Delta\varphi) ; \underline{E}_{m3} = E_{m0} \exp(-2j \Delta\varphi) ; \dots$$

$$\underline{E}_{mp} = E_{m0} \exp[-j(p-1)\Delta\varphi] ; \dots \underline{E}_{mN} = E_{m0} \exp[-j(N-1)\Delta\varphi].$$

Sommons ces amplitudes pour obtenir l'amplitude de la vibration dans une direction θ . Nous obtenons :

$$\underline{E}_m = E_{m0} \sum_{p=1}^N \exp[-j(p-1)\Delta\varphi]$$

où $\sum_{p=1}^N \exp[-j(p-1)\Delta\varphi]$ est une progression géométrique de raison $\exp(-j\Delta\varphi)$ de premier terme 1, dont la somme est connue. Ainsi :

$$\begin{aligned} \underline{E}_m &= E_{m0} \frac{1 - \exp(-jN\Delta\varphi)}{1 - \exp(-j\Delta\varphi)} \\ &= E_{m0} \frac{\exp\left(-jN\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}{\exp\left(-j\frac{\Delta\varphi}{2}\right)} \left[\frac{\exp\left(-jN\frac{\Delta\varphi}{2}\right) - \exp\left(jN\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}{\exp\left(-j\frac{\Delta\varphi}{2}\right) - \exp\left(j\frac{\Delta\varphi}{2}\right)} \right] \\ &= E_{m0} \exp\left[-j(N-1)\frac{\Delta\varphi}{2}\right] \left[\frac{\sin\left(N\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)} \right]. \end{aligned}$$

D'où :

$$I(\Delta\varphi) = \underline{E}_m \underline{E}_m^* = E_{m0}^2 \left[\frac{\sin\left(N\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)} \right]^2$$

$$\text{avec } \Delta\varphi = \frac{2\pi a}{\lambda_0} (\sin(\theta) - \sin(\theta_i)).$$

C.4. Étude de la répartition angulaire de l'intensité

• La fonction $I(\Delta\varphi) = E_{m0}^2 \left[\frac{\sin\left(N\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)} \right]^2$ est **périodique** de période 2π et **paire** pour la variable $\Delta\varphi$. On l'étudie donc sur l'intervalle $\Delta\varphi \in [0, \pi]$.

• Calculons les **valeurs aux bornes de l'intervalle** : si $\Delta\varphi \rightarrow 0$, alors $1 \rightarrow N^2 E_{m0}^2$, et si $\Delta\varphi = \pi$, alors $I(\pi) = 0$ si N est pair et E_{m0}^2 si N est impair.

• L'intensité est nulle si $\sin\left(N\frac{\Delta\varphi}{2}\right) = 0$ et $\sin\frac{\Delta\varphi}{2} \neq 0$, soit pour les valeurs :

$$N\frac{\Delta\varphi}{2} = p\pi \Leftrightarrow \Delta\varphi = \frac{2p\pi}{N}, \text{ avec } p \in \mathbb{Z}^* \text{ et non multiple de } N.$$

• Sur l'intervalle $\Delta\varphi \in [0, 2\pi]$, chaque borne de l'intervalle correspond à un maximum principal $I = N^2 E_{m0}^2$: ceci montre bien tout l'intérêt des réseaux

Hidden page

1. Cette expression peut être retrouvée en considérant qu'il s'agit de la diffraction par N pupilles identiques percées dans un écran. On peut alors appliquer le résultat :

$$I(M) = I_{\text{dét 1 pupille}}(M) \times I_{\text{dét N pupilles}}(M).$$

2. Cette analyse a valeur qualitative car, dans les réseaux, la largeur d'une fente devient si petite que les hypothèses faites dans le développement de la diffraction sont alors en défaut.

Remarque : le développement précédent a été fait avec l'hypothèse d'une fente fine (paragraphe C.3), donc d'une diffraction isotrope. Si l'on tient compte de la largeur b d'une fente, l'intensité s'écrit alors¹ :

$$I = I_0 \operatorname{sinc}^2(u) \left[\frac{\sin\left(N \frac{\Delta\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)} \right]^2$$

avec $u = \frac{\pi b (\sin(\theta) - \sin(\theta_i))}{\lambda_0}$ et $\Delta\varphi = \frac{2\pi a}{\lambda_0} (\sin(\theta) - \sin(\theta_i))$ (paragraphe

B.4). De nouveau, nous observons que les interférences constructives données par le réseau sont modulées par le phénomène de diffraction. L'intensité des spectres va diminuant avec l'ordre m (figure 28)². C'est bien ce que l'on observe expérimentalement.

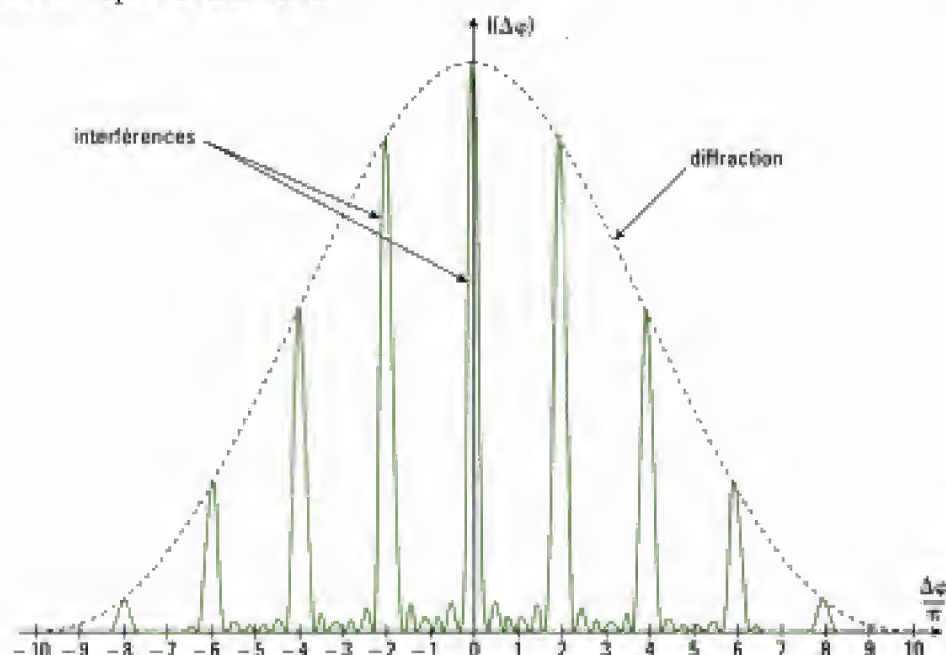


Fig. 28 – Influence de la diffraction sur l'amplitude des spectres de différents ordres.

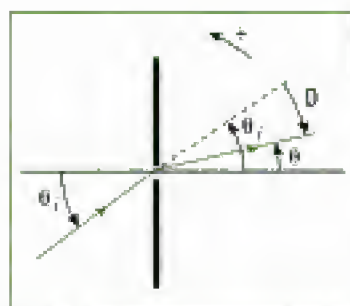


Fig. 29 – Déviation D et orientation des angles.

C.5. Minimum de déviation dans un ordre donné

Pour un ordre m donné, soit D_m la déviation du rayon incident sous l'angle θ_i et diffracté sous l'angle θ_m : $D_m = \theta_m - \theta_i$ (figure 29). Nous cherchons un extremum de D_m lorsque θ_i varie. Or, pour un ordre m donné :

$$a [\sin(\theta_m) - \sin(\theta_i)] = m\lambda_0 \quad (3).$$

• En différenciant cette relation à m et λ_0 constants, on obtient :

$$\cos(\theta_m) d\theta_m - \cos(\theta_i) d\theta_i = 0.$$

• En différenciant aussi la relation donnant la déviation D_m , nous avons :

$$dD_m = 0 = d\theta_m - d\theta_i.$$

• En regroupant ces deux relations, il vient pour cet extremum :

$$\cos(\theta_m) = \cos(\theta_i).$$

Soit $\theta_m = \theta_i$, et dans ce cas le rayon n'est pas dévié (image géométrique sans intérêt). Soit $\theta_m = -\theta_i$, et dans ce cas, le rayon diffracté est effectivement dévié ; il est symétrique du rayon incident par rapport au réseau.

On peut montrer, par une étude de la dérivée seconde de la déviation que cet extremum est un minimum, que nous noterons D_{\min} : $D_{\min} = 2\theta_m$.

Ce minimum vérifie donc :

$$\sin\left(\frac{D_{\min}}{2}\right) = \frac{m\lambda_0}{2a}, \text{ avec } m \text{ l'ordre du spectre } (m \neq 0).$$

Ce résultat n'est valable que si l'angle d'incidence est réglé à la valeur qui donne le minimum de déviation. Connaissant a , dans un ordre donné, on mesure la déviation minimale D_{\min} et on en déduit λ_0 ¹. Cette mesure rapide manque cependant de précision. On peut aussi déterminer a en connaissant λ_0 .

C.6. Pouvoir dispersif d'un réseau

La relation (3) met en évidence que l'angle θ_m , correspondant à un ordre donné, dépend de la longueur d'onde utilisée : *le réseau est un système dispersif*. Nous devons mettre à part l'ordre $m = 0$ pour lequel le réseau donne alors une raie unique dans laquelle les radiations incidentes se superposent : cette raie a donc la couleur de la source. Nous voyons aussi que les grandes longueurs d'onde sont plus déviées que les courtes : le réseau dévie plus la lumière rouge que la lumière bleue, ce qui est l'inverse pour le prisme².

C.7. Conditions d'analyse spectrale

L'analyse spectrale de la lumière sera convenable si le réseau sépare correctement la lumière dans un ordre donné et si deux ordres différents ne se recouvrent pas.

C.7.1 – Séparation dans un spectre d'ordre donné

Nous prenons le cas de deux radiations de longueurs d'onde voisines λ_0 et $\lambda_0 + \Delta\lambda_0$ en supposant que $\Delta\lambda_0 \ll \lambda_0$. Cela concerne par exemple le cas des doublets spectraux.

Dans un ordre m donné, le réseau ne peut résoudre ces deux raies séparées de $\Delta\lambda_0$ que si la largeur angulaire, qui sépare les maximums principaux consécutifs de chacune de ces radiations, est supérieure ou égale à la demi largeur angulaire du pic d'ordre m (critère de Rayleigh).

• Expression de la largeur angulaire $d\theta_m$ dans un ordre donné

En différenciant la relation (3), pour un ordre m et une incidence donnés :

$$a \cos(\theta_m) d\theta_m = m d\lambda_0, \text{ soit encore : } d\theta_m = m \frac{d\lambda_0}{a \cos(\theta_m)}.$$

• Expression de la demi largeur $d\theta_{m \text{ pic}}$ du pic d'ordre m

Les minimums qui bordent un maximum d'ordre m sont écartés de lui de

$$d(\Delta\varphi) = \frac{2\pi}{N}; \text{ la demi largeur angulaire } d\theta_{m \text{ pic}} \text{ du pic correspondante s'ob-}$$

tient en différenciant la relation $\Delta\varphi = \frac{2\pi a}{\lambda_0} [(\sin(\theta) - \sin(\theta_1))]$. D'où :

$$d(\Delta\varphi) = d\left(\frac{2\pi a}{\lambda_0} [(\sin(\theta) - \sin(\theta_1))]\right) = \frac{2\pi a}{\lambda_0} \cos(\theta) d\theta,$$

et en l'égalant à l'expression précédente de $d(\Delta\varphi)$, il vient :

$$d\theta_{m \text{ pic}} = \frac{\lambda_0}{N a \cos(\theta_m)}.$$

1. Voir exercice 4.

2. Le prisme utilise la réfraction pour disperser la lumière alors que le réseau utilise la diffraction.

3. Voir le paragraphe C.4.

1. On définit le pouvoir de résolution d'un réseau par le rapport :

$$R = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda_{\text{min}}}$$

ou $\Delta\lambda_{\text{min}}$ est le plus petit écart de longueur d'onde décelable. La résolution théorique est donc égale à mN .

• Application du critère de Rayleigh

L'application de ce critère donne $d\theta_m \geq d\theta_{\text{m pic}}$ soit :

$$m \frac{d\lambda_0}{a \cos(\theta_m)} \geq \frac{\lambda_0}{N a \cos(\theta_m)} \text{ et en assimilant } d\lambda_0 \text{ à } \Delta\lambda_0 :$$

$$\frac{\lambda_0}{\Delta\lambda_0} \leq mN.$$

Ceci fixe la contrainte cherchée concernant le réseau, par l'ordre observé et le nombre de traits éclairés N^1 .

Application 3 Quelle est la contrainte pour résoudre le doublet du sodium?

On donne $\lambda_0 = 589,0 \text{ nm}$ et $\Delta\lambda_0 = 0,6 \text{ nm}$.

Solution

Ici, $\frac{\lambda_0}{\Delta\lambda_0} = 982$. En choisissant de travailler à l'ordre 1, il faut choisir un réseau comportant un

nombre de traits éclairés $N > 982$, donc de l'ordre de 1 000. Si l'on veut travailler à l'ordre 2, on obtient $N > 491$ donc de l'ordre de 500.

D'un point de vue expérimental, il faut aussi que la largeur angulaire de l'image de la fente source soit inférieure à la largeur d'un pic principal pour résoudre ces deux raies.

C.7.2 – Pouvoir dispersif

À partir du développement précédent, nous pouvons donner une expression littérale de la dispersion angulaire D du réseau :

$$D = \frac{d\theta_m}{d\lambda_0} = \frac{m}{a \cos(\theta_m)}.$$

La dispersion est donc d'autant plus élevée que l'ordre d'interférence m est grand et que le pas a du réseau est petit.

C.7.3 – Recouvrement des ordres

Le prisme ne donne qu'un seul spectre alors que le réseau en donne plusieurs, dans la limite de l'ordre maximal déterminé précédemment.

Ceci est un avantage comme nous venons de le voir.

Cependant, il peut y avoir recouvrement des spectres de différents ordres.

Dans le cas de la lumière blanche, chaque spectre est continu, mais il y a plusieurs spectres observés. Expérimentalement, on constate que le spectre d'ordre $m = 1$ est le seul à ne pas être recouvert (figure 30).

Lorsqu'il y a recouvrement dans une direction donnée, deux longueurs d'onde différentes λ_{01} et λ_{02} appartenant à deux ordres différents, se superposent. Nous avons donc :

$$a[(\sin(\theta_m) - \sin(\theta_{m+1}))] = m\lambda_{01} = (m+1)\lambda_{02}, \text{ avec } \lambda_{02} < \lambda_{01}.$$

Ceci permet d'exprimer $m = \frac{\lambda_{02}}{\lambda_{01} - \lambda_{02}}$. En prenant les longueurs d'onde

extrêmes du visible (400 – 780 nm), nous obtenons $m = 1,05$. Il n'y a donc pas recouvrement à l'ordre 1. Les ordres 2 et 3 par contre se recouvrent.

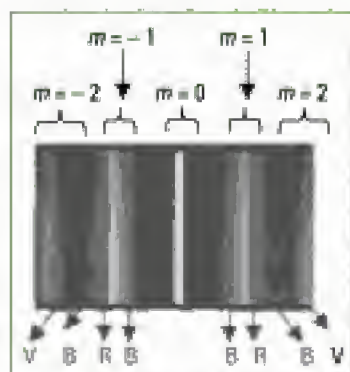


Fig. 30 – Dispersion de la lumière blanche par un réseau. On observe les spectres des deux premiers ordres (incomplet pour le deuxième ordre). Les spectres d'ordre 1 et 2 ne se recouvrent pas et le deuxième ordre est plus dispersif. (V : vert ; B : bleu ; R : rouge)

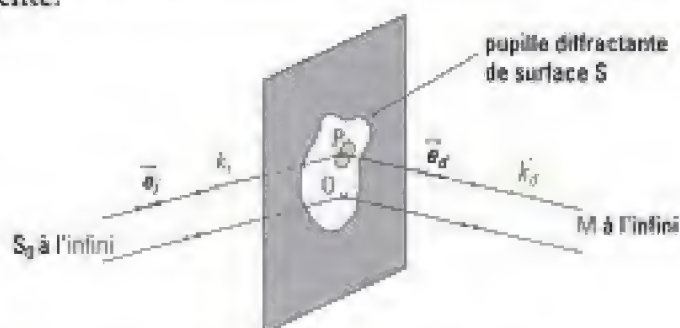
Hidden page

✓ Diffraction à l'infini ou de Fraunhofer

La **diffraction à l'infini**, ou de Fraunhofer, est observable lorsque la source et l'écran d'observation sont **très éloignés** de la pupille diffractante de sorte qu'on les considère à l'infini. Pour observer la diffraction à l'infini d'une pupille, nous pouvons :

- soit la placer dans le faisceau d'un laser couvrant toute la pupille et placer un écran à quelques mètres;
- soit l'éclairer avec un faisceau de lumière parallèle créé par une source ponctuelle placée au foyer d'une lentille convergente et ramener la figure de diffraction à distance finie en l'observant dans le plan focal d'une lentille convergente.

L'expression du principe de Huygens appliqué à une pupille diffractante dans les conditions de la diffraction à l'infini nous donne l'**amplitude de l'onde diffractée en M** :



$$\underline{E}_m(M) = K E_{mi} \exp[-j k_0 (S_0 OM)] \iint_{(S)} \exp[j(\vec{k}_d - \vec{k}_i) \cdot \vec{OP}] dS.$$

✓ Diffraction par une pupille rectangulaire de largeur b et de hauteur d

• Amplitude et intensités diffractées

L'amplitude de l'onde diffractée par la pupille rectangulaire se met sous la forme :

$$\underline{E}_m(M) = K b d E_{mi} \exp[-j k_0 (S_0 OM)] \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi(\alpha_d - \alpha_i)b}{\lambda_0} \right] \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi(\beta_d - \beta_i)d}{\lambda_0} \right].$$

L'intensité lumineuse I s'écrit :

$$I(\alpha_d, \beta_d) = K^2 b^2 d^2 E_{mi}^2 \operatorname{sinc}^2 \left[\frac{\pi(\alpha_d - \alpha_i)b}{\lambda_0} \right] \operatorname{sinc}^2 \left[\frac{\pi(\beta_d - \beta_i)d}{\lambda_0} \right].$$

Les coefficients α , β et γ sont les composantes des vecteurs d'onde \vec{k}_d et \vec{k}_i sur la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

• Allure de la figure de diffraction

– Dans les conditions de diffraction à l'infini, l'intensité est **maximale** dans la direction de l'image géométrique de la source ($\alpha_d = \alpha_i$ et $\beta_d = \beta_i$).

– La **tache centrale**, ou pic principal, a pour dimensions angulaires $2 \frac{\lambda_0}{b}$ dans une direction perpendiculaire à la hauteur de la fente et $2 \frac{\lambda_0}{d}$ dans une direction perpendiculaire à sa largeur.

– Les **taches secondaires** ont des dimensions moitié de celles de la tache centrale.

– La forme opérationnelle de l'**intensité lumineuse** est :

$$I(x_E, y_E) = I_0 \operatorname{sinc}^2 \left[\frac{\pi b}{\lambda_0 f'_2} x_E \right] \operatorname{sinc}^2 \left[\frac{\pi d}{\lambda_0 f'_2} y_E \right],$$

f'_2 étant la distance focale de la lentille de projection, x_E et y_E les coordonnées du point M de l'écran où l'on observe la diffraction de l'onde.

✓ Diffraction par une pupille fente de largeur b

Dans ce cas, le phénomène de diffraction n'est notable que dans la direction **perpendiculaire** à la largeur de la fente et l'intensité s'écrit :

$$I(x_E) = I_0 \operatorname{sinc}^2 \left[\frac{\pi b}{\lambda_0 f'_2} x_E \right] \text{ ou } I(\theta) = I_0 \operatorname{sinc}^2 \left[\frac{\pi b \sin(\theta)}{\lambda_0} \right]$$

avec θ l'angle entre la normale à l'ouverture et la direction d'observation : $\sin(\theta) = \theta$.

✓ Diffraction par une ouverture circulaire de rayon R

On observe essentiellement une **tache centrale brillante** (tache d'Airy) qui concentre l'essentiel de l'intensité lumineuse dans un cône de demi-angle au sommet égal à $\theta = 1,22 \frac{\lambda_0}{2R}$. Cette tache centrale est bordée d'anneaux circulaires alternativement sombres et brillants peu lumineux.

✓ Théorème de Babinet

Dans les conditions de diffraction à l'infini, les figures de diffraction produites par des pupilles (ou écrans) complémentaires sont identiques en tous les points du plan focal d'une lentille convergente, sauf sur l'image géométrique de la source primaire S_0 .

✓ Diffraction par les fentes de Young

Pour deux fentes de Young de largeur b , écartées de a et de hauteur d , l'intensité lumineuse dans la direction angulaire θ s'écrit :

$$I(\theta) = 2K^2 E_m^2 b^2 d^2 \text{sinc}^2 \left(\frac{\pi b \theta}{\lambda_0} \right) \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi a \theta}{\lambda_0} \right) \right],$$

où l'on reconnaît un phénomène d'interférences modulé par la diffraction.

✓ Les réseaux de diffraction

- Un **réseau de diffraction** est une pupille qui comprend N motifs diffractants identiques régulièrement espacés d'une distance a appelée le pas du réseau. Un réseau permet une analyse spectrale de la lumière.

- La **différence de phase** $\Delta\varphi$ entre deux rayons consécutifs dans la direction θ est :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi a}{\lambda_0} [(\sin(\theta) - \sin(\theta_i))].$$

Les angles de maximum d'intensité lumineuse sont donnés par :

$$a[\sin(\theta_m) - \sin(\theta_i)] = m\lambda_0, \quad \text{avec } m \in \mathbb{Z}.$$

- Si N est le nombre de traits éclairés du réseau, l'intensité lumineuse s'écrit alors :

$$I = E_m^2 \left[\frac{\sin\left(N \frac{\Delta\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)} \right]^2$$

où E_m est l'amplitude diffractée par une fente. L'intensité lumineuse est surtout concentrée dans les maximums principaux qui vérifient $\Delta\varphi = 2m\pi$; à la direction angulaire θ_m correspond l'ordre d'interférence m .

- La déviation D passe par un minimum D_{\min} lorsque le rayon diffracté est symétrique du rayon incident par rapport au réseau. Dans ce cas, pour un ordre m et une longueur d'onde λ_0 donnés, D_{\min} vérifie la relation :

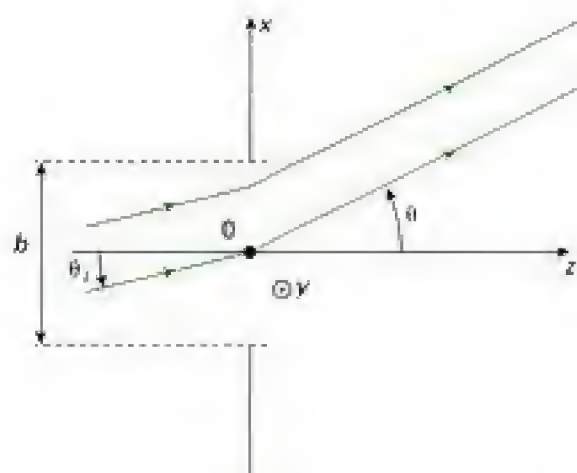
$$\sin\left(\frac{D_{\min}}{2}\right) = \frac{m\lambda_0}{2a}.$$

- Le **pouvoir de dispersion angulaire** du réseau, dans un ordre m donné, s'écrit :

$$D = \frac{d\theta_m}{d\lambda_0} = \frac{m}{a \cos(\theta_m)}.$$

La dispersion est donc d'autant plus élevée que l'ordre m est grand et que le pas a du réseau est petit.

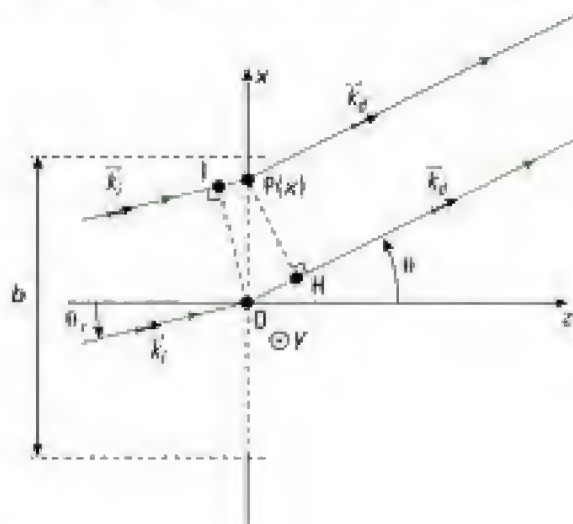
Hidden page



Exprimer l'amplitude diffractée dans la direction θ . En déduire l'intensité diffractée correspondante en fonction de l'angle θ .

Solution

- ① Le point P est ici repéré par la seule coordonnée x puisque la fente est supposée très fine. Le point M est repéré par la direction θ .
- ② Pour exprimer le déphasage $(\vec{k}_d - \vec{k}_i) \cdot \vec{OP}$, on introduit les paramètres suivants :



On pose $\|\vec{k}_i\| = \|\vec{k}_d\| = k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ et il vient :

$$\vec{k}_d \cdot \vec{OP} = k_0 OP \cos(\vec{k}_d, \vec{OP}) = k_0 OH = k_0 x \sin \theta = k_0 x \theta.$$

De même :

$$\vec{k}_i \cdot \vec{OP} = k_0 IP = k_0 x \sin \theta_i = k_0 x \theta_i.$$

- ③ Si $|x| < \frac{a}{2}$: la pupille est transparente et on a donc $t(P) = 1$.

Si $|x| > \frac{a}{2}$: la pupille est opaque et on a donc $t(P) = 0$.

- ④ Le principe de Huygens-Fresnel s'écrit en posant $dS = d \cdot dx$:

$$E(\theta) = KE_{\text{inc}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \exp[jk_0(\theta - \theta_i)x] d \cdot dx$$

Hidden page

Exercices

Niveau 1

Ex. 1 Compromis diffraction – image géométrique

Une boîte à faces rectangulaires est utilisée pour former l'image d'une source ponctuelle S , monochromatique, de longueur d'onde dans le vide λ_0 , que l'on suppose située à l'infini. La boîte ne contient aucune lentille, on a simplement percé un petit trou de rayon r sur la face dirigée vers S . On note h la profondeur de la boîte.

- 1) Déterminer le rayon de la tache image de S qui se forme sur un calque situé sur la face arrière de la boîte en ne tenant pas compte du phénomène de diffraction.
- 2) Déterminer le rayon de la tache de diffraction en admettant que les conditions de Fraunhofer sont ici satisfaites.
- 3) En déduire le rayon optimal du trou.

Ex. 2 Montage de diffraction de Fraunhofer

1) On place une fente de largeur b , de longueur $d \gg b$, à une distance D d'un écran. Donner le schéma du dispositif, sachant que les rayons issus de la source, monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 632,8$ nm, viennent de l'infini.

Décrire ce qui est observé.

Sur un écran placé à deux mètres du plan de la fente, on recueille une tache principale de longueur 1 cm. Donner la largeur b de la fente correspondante.

2) On intercale une lentille convergente entre l'écran (placé dans le plan focal image de celle-ci) et une autre fente.

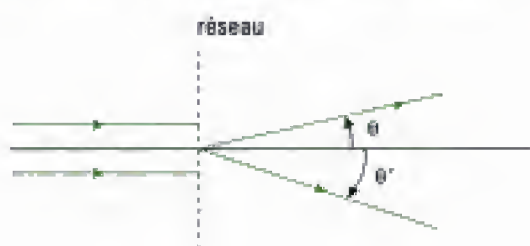
Faire un schéma du dispositif.

On observe toujours une tache principale de longueur 1 cm; la distance focale de la lentille étant égale à 1 mètre, donner la largeur b de la fente.

Oral, CCP, PSI, 2001

Ex. 3 Spectroscopie à réseau

Un réseau de pas a est éclairé par une source de longueur d'onde λ_0 sous incidence quasi normale :



Pour les ordres $|k| \in \{1, 2\}$, on donne les valeurs de θ et θ' :

	$ k = 1$	$ k = 2$
θ_k	$23^\circ 12'$	$49^\circ 18'$
θ'_k	$-19^\circ 30'$	$-44^\circ 15'$

1) L'incidence est-elle vraiment quasi-normale ? Calculer le pas du réseau et le nombre de traits par millimètre pour $\lambda_0 = 0,5461$ μm .

2) On éclaire le réseau avec une autre source de longueur d'onde λ_1 inconnue. On mesure $\theta_2 = 42^\circ 09'$ et $\theta'_2 = -37^\circ 43'$. Calculer λ_1 .

Oral, CCP, PC, 2001

Ex. 4 Travail expérimental

Question de cours : étude expérimentale avec un réseau plan.

Oral, Mines-Ponts, PC, 1999

Niveau 2

Ex. 5 Apodisation

Une plaque photographique de largeur $2a$ et de longueur b grande devant sa largeur est placée dans un plan (Oxy) . Sa transmittance s'écrit :

$$\begin{cases} T(x, y) = 1 - \frac{|x|}{a} & \text{si } |x| \leq a \\ T(x, y) = 0 & \text{si } |x| > a \end{cases}$$

On éclaire la plaque par une onde plane monochromatique sous incidence normale.

1) Déterminer l'intensité diffractée $I(\theta)$ dans les directions du plan (Oxz) faisant un angle θ faible avec la direction de l'onde incidente (on observe dans le plan focal image d'une lentille convergente).

2) Tracer la courbe $\frac{I(\theta)}{I(0)}$ puis comparer au cas de la fente transparente de largeur $2a$.

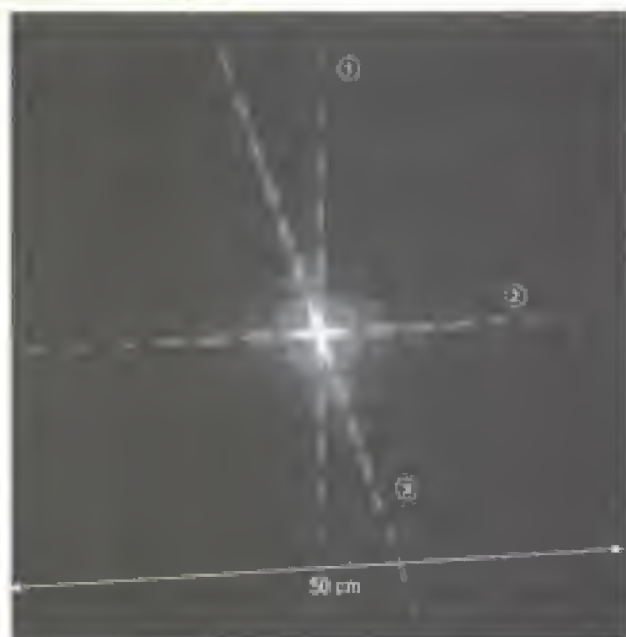
Oral, Centrale-Supélec, 1996

Ex. 6 Étude de figures de diffraction

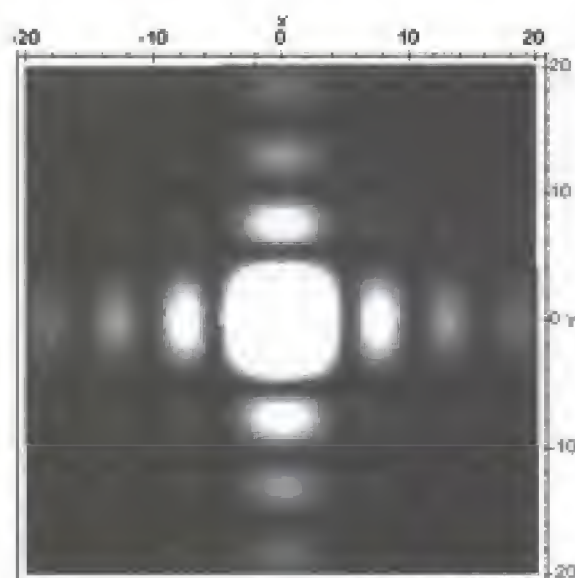
1) On donne ci-après la photographie de la figure de diffraction obtenue sur un écran en utilisant trois cheveux croisés et placés dans un plan parallèle à l'écran.

L'écran est situé à 2 m du dispositif diffractant éclairé par un faisceau laser de longueur d'onde 633 nm.

Indiquer la position relative des cheveux puis donner l'ordre de grandeur du diamètre d'un cheveu.



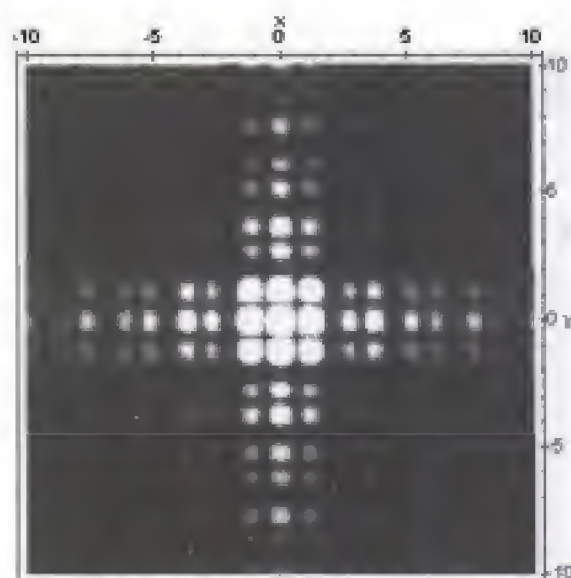
2) On cherche à identifier une pupille diffractante dont on donne ci-dessous la figure de diffraction simulée dans les conditions de Fraunhofer. L'écran d'observation est placé dans le plan focal image d'une lentille de projection (distance focale égale à 1 m) et est centré sur le foyer principal image F' (les dimensions sur les axes sont données en millimètres) :



La source est identique à celle de la première question. Indiquer la forme et les dimensions de la pupille en utilisant uniquement la figure de diffraction (aucun calcul théorique n'est demandé).

3) La simulation suivante est obtenue avec une autre pupille (dimensions également en millimètres).

Comparer qualitativement avec le cas précédent. On précise que la pupille est constituée d'ouvertures carrées identiques et on demande d'en déduire les caractéristiques géométriques de cette pupille en utilisant là aussi uniquement la figure de diffraction.



4) Que se passe-t-il pour la figure de diffraction d'une pupille si celle-ci est traduite parallèlement à elle-même ? Si elle est mise en rotation autour de son axe optique ?

Comment déplacer le centre d'une figure de diffraction sans autre modification de cette figure ?

Ex. 7 Diffraction par un réseau sinusoïdal

Un faisceau parallèle, de longueur d'onde λ , traverse une fente de largeur ℓ , de longueur $L \gg \ell$ et dont la transmittance est donnée par :

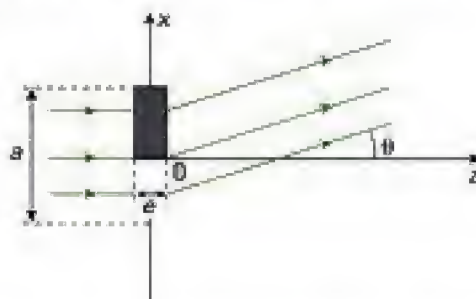
$$t(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \right] \text{ pour } -\frac{\ell}{2} \leq x \leq \frac{\ell}{2}$$

avec $a \ll \ell$. Étudier la figure de diffraction.

Oral, X, MP, 1999

Ex. 8 Objet diffractant de phase et d'amplitude

On considère une fente de largeur a , de longueur $b \gg a$ et dont la moitié de l'ouverture est obstruée par une lame de verre d'indice n , d'épaisseur e :



L'ensemble est éclairé sous incidence normale par une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ dans le vide.

Exprimer l'intensité diffractée à l'infini dans la direction repérée par l'angle θ .

Oral, Saint-Cyr, MP, 2003

Hidden page

b) En déduire la largeur $\Delta\lambda$ du domaine de longueur d'onde des radiations pénétrant dans la fente F_2 après passage par F_1 et réflexion sur le réseau, utilisé dans l'ordre 1, en fonction de ξ , b , η et $f'_2 = f'_1 = f'$.

c) Donner la valeur maximale de $\Delta\lambda$ dans le domaine accessible à ξ .

A.N. : $f' = 50$ mm, $\eta = 0,5$ mm.

3) Un bon test permettant de juger de la qualité d'un spectrophotomètre de travaux pratiques consiste à comparer le spectre expérimental d'absorption (courbe 2, figure 3) de l'ion MnO_4^- obtenu avec cet appareil et le spectre de référence disponible (courbe 1, figure 3). Ce dernier présente cinq pics d'absorption en : $\lambda_1 = 490$ nm ; $\lambda_2 = 506$ nm ; $\lambda_3 = 526$ nm ; $\lambda_4 = 546$ nm ; $\lambda_5 = 564$ nm.

a) En exploitant la courbe 1, estimer la largeur de la bande passante en longueur d'onde $\Delta\lambda_{\text{app}}$ de l'appareil utilisé pour établir le spectre de référence.

b) Expliquer le désaccord entre les deux courbes. Estimer la bande spectrale $\Delta\lambda$ de l'appareil testé en

travaux pratiques à partir de ces données expérimentales. Comparer au résultat déduit de la largeur des fentes.

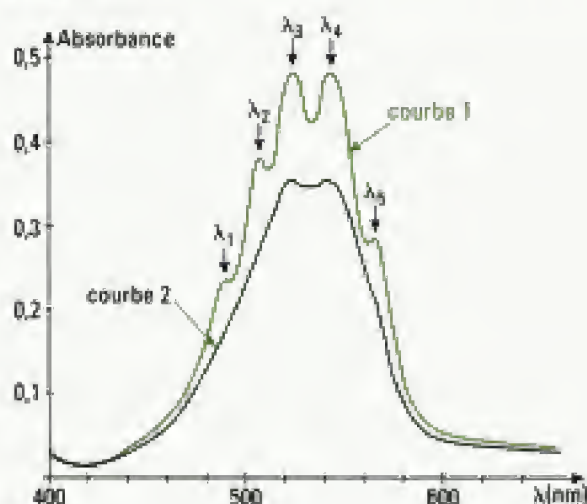


Figure 3

D'après écrit, Centrale-Supélec, MP, 2002

Indications

Ex. 6

2) Il faut utiliser les résultats établis en cours concernant l'ouverture rectangulaire de largeur b et de longueur d en les adaptant en fonction des figures de diffraction proposées. S'astreindre à ne poser qu'un minimum d'équations et privilégier le raisonnement physique.

Ex. 7

Pour établir l'expression de l'intensité diffractée à l'infini dans une direction θ donnée, il faut analyser l'écart angulaire entre les différents termes contenus dans l'expression de l'amplitude diffractée. Ceci permet de simplifier le calcul.

Ex. 8

Le coefficient de transmission en amplitude t_0 du champ électrique est nécessairement inférieur à 1. De plus, la traversée de la lame provoque un retard de phase.

Ex. 9

1) En terme de pupille diffractante, chaque bande se comporte comme une fente de mêmes dimensions (théorème de Babinet).

2) Pour exprimer l'amplitude totale diffractée par l'ensemble du réseau, il faut commencer par exprimer la différence de marche entre les ondes diffractées dans une même direction θ par deux bandes réfléchissantes consécutives.

Ex. 10

1) b) Montrer que les positions du réseau pour lesquelles les ordres $p = 1$ et $p = -1$ sont en F_2 sont symétriques par rapport à celle donnant $\delta = 0$.

2) a) Déterminer l'ouverture angulaire du faisceau incident sur le réseau.

b) Pour un ordre d'interférence p donné, à chaque incidence i correspond une longueur d'onde différente contenue dans le spectre de la source (c'est le rôle séparateur du réseau).

Hidden page

Hidden page

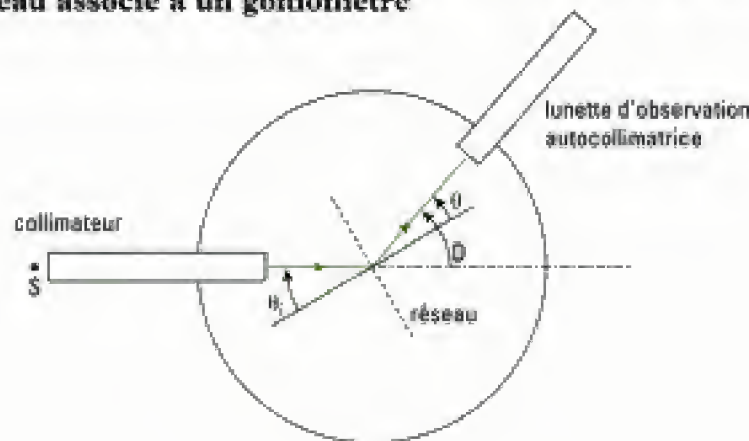
Hidden page

Commentons ce montage et les observations qui peuvent être faites :

- L'ensemble {fente source + lentille L_1 } permet de réaliser un faisceau incident de lumière parallèle si l'on place la fente source dans le plan focal objet de L_1 . Il constitue un collimateur et permet de réaliser la première condition de Fraunhofer (source à l'infini).
- L'ensemble $\{L_2 + \text{écran}\}$ constitue un dispositif d'observation, et en plaçant l'écran dans le plan focal image de L_2 , on réalise la deuxième condition de Fraunhofer.
- On observe sur l'écran plusieurs spectres d'ordres d'interférence différents (sur la figure, nous avons représenté les ordres ± 1 et 0). Chaque spectre peut contenir plusieurs radiations visibles selon la nature de la source utilisée et si le pouvoir dispersif du réseau en permet l'observation (pour agrandir la taille de l'image, utiliser une lentille de projection de grande focale).

En séance de TP, on utilise en général un goniomètre pour étudier les propriétés du réseau ou pour analyser le spectre de la source, ce que nous allons décrire dans le point suivant.

• Montage du réseau associé à un goniomètre



 Ne pas utiliser de source laser avec ce type de montage car il peut y avoir danger pour l'œil.

La lunette permet ici une mesure à l'œil grâce à un vernier. Nous avons également fait apparaître la déviation D entre la direction du faisceau incident et la direction d'observation.

• Quelques mesures avec le montage utilisant le goniomètre

- Mesure du pas a du réseau (ou du nombre n de traits par unité de longueur)

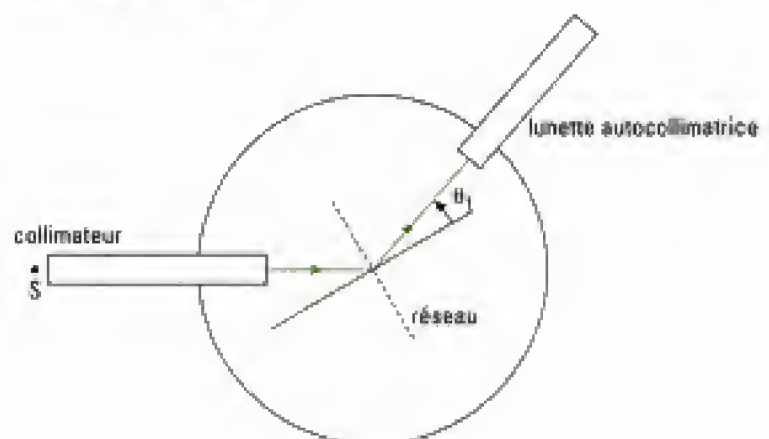
On peut penser mettre à profit la relation fondamentale du réseau :

$$\sin \theta_m = \sin \theta_i + m \frac{\lambda_0}{a} \text{ pour un ordre d'interférence } m.$$

Mais en pratique, l'angle d'incidence θ_i est difficile, voire impossible à mesurer. Dans ce cas, on effectue la mesure de la déviation minimale D_m pour une radiation de longueur d'onde λ_0 connue. Rappelons tout d'abord la relation qui permet de calculer a :

$$\sin\left(\frac{D_{\min}}{2}\right) = \frac{m\lambda_0}{2a}.$$

On vise ainsi une raie dans le spectre d'un ordre m donné et on tourne la plate-forme dans un même sens (qui diminue D) jusqu'à observer que la raie pointée dévie en sens inverse. À l'aide du réticule, on pointe la raie et on mesure la position angulaire α_i correspondante de la lunette à l'aide du vernier.



Hidden page

Le principe de Huygens-Fresnel permet alors d'écrire l'amplitude diffractée dans la direction θ :

$$\underline{E}(\theta) = K \underline{E}_m \cdot \iint_{(S)} T(x, y) \cdot e^{j k \cdot OM} \cdot dx \, dy$$

donc :

$$\begin{aligned} \underline{E}(\theta) &= K \underline{E}_m \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-a}^a \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) \cdot e^{j k \cdot x \cdot \theta} \cdot dx \\ &= K \cdot b \cdot \underline{E}_m \left[\int_{-a}^0 \left(1 + \frac{x}{a}\right) \cdot e^{j k \cdot x \cdot \theta} \cdot dx + \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right) \cdot e^{j k \cdot x \cdot \theta} \cdot dx \right] \\ &= K \cdot b \cdot \underline{E}_m \left[\int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right) \cdot e^{-j k \cdot x \cdot \theta} \cdot dx + \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right) \cdot e^{j k \cdot x \cdot \theta} \cdot dx \right] \\ &= 2K \cdot b \cdot \underline{E}_m \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right) \cdot \cos(kx\theta) \cdot dx. \end{aligned}$$

On intègre par partie : $u = 1 - \frac{x}{a} \Rightarrow du = -\frac{dx}{a}$

$$dv = \cos(kx\theta) dx \Rightarrow v = \frac{1}{k\theta} \cdot \sin(kx\theta)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \underline{E}(\theta) &= 2K \cdot b \cdot \underline{E}_m \left\{ \left[\left(1 - \frac{x}{a}\right) \frac{\sin(kx\theta)}{k\theta} \right]_0^a + \frac{1}{a k \theta} \int_0^a \sin(kx\theta) \cdot dx \right\} \\ &= \frac{2K \cdot b \cdot \underline{E}_m}{a \cdot k \cdot \theta} \int_0^a \sin(kx\theta) \cdot dx = -\frac{2K \cdot b \cdot \underline{E}_m}{a(k\theta)^2} [\cos(kx\theta)]_0^a \end{aligned}$$

avec : $[\cos(kx\theta)]_0^a = \cos(ka\theta) - 1 = -2 \sin^2\left(\frac{ka}{2} \theta\right)$ et $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

D'où :

$$\underline{E}(\theta) = -\frac{K \cdot ab \cdot \underline{E}_m}{2 \left(\frac{ka\theta}{2}\right)^2} \left[-2 \sin^2\left(\frac{ka}{2} \theta\right)\right] = K \cdot ab \cdot \underline{E}_m \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{\pi \cdot a \cdot \theta}{\lambda}\right).$$

L'intensité diffractée dans la direction θ s'écrit donc :

$$I(\theta) = \underline{E}(\theta) \cdot \underline{E}^*(\theta) = (K \cdot ab \cdot \underline{E}_m)^2 \cdot \text{sinc}^4\left(\frac{\pi a \theta}{\lambda}\right).$$

En posant $I(0) = (K \cdot ab \cdot \underline{E}_m)^2$, il vient :

$$I(\theta) = I(0) \cdot \text{sinc}^4\left(\frac{\pi a \theta}{\lambda}\right).$$

2) - Le maximum principal a une largeur égale à $\frac{2\lambda}{a}$ (figure 1).

- Les maximums secondaires d'intensité ont pour valeur 0,20 % puis 0,03 % de I_0 et une largeur égale à $\frac{\lambda}{a}$.

Pour comparer au cas de la fente transparente de même largeur ici égale à $2a$, nous avons superposé les deux courbes d'intensité sachant que pour la fente transparente, on a :

$$I(\theta) = I(0) \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{2\pi a \theta}{\lambda}\right).$$

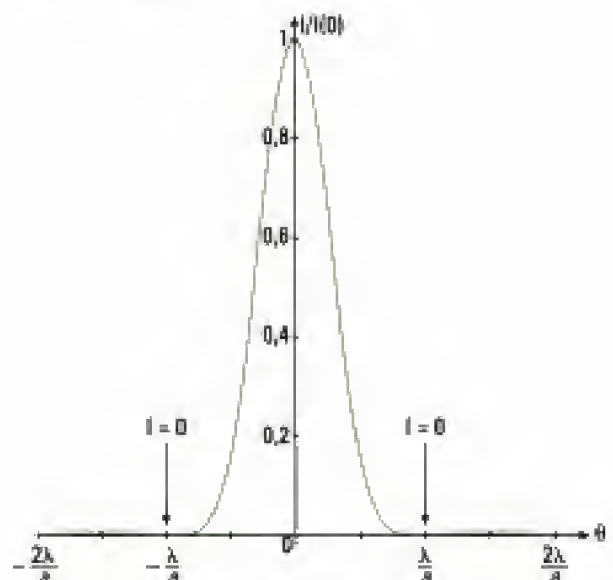


Figure 1

– La largeur angulaire du maximum principal et des maximums secondaires est deux fois plus grande dans le cas de la plaque de transmittance $T(x, y)$.

– Les lobes secondaires sont en revanche d’amplitudes beaucoup plus faibles que ceux obtenus pour la fente transparente.

On concentre donc l’énergie dans le maximum central au détriment d’un élargissement de celui-ci.

⚠ Attention, toutefois, car la normalisation de $I(\theta)$ à $I(0)$ ne doit pas faire oublier que $I(0)$ est quatre fois plus élevée dans le cas d’une fente transparente de largeur $2a$. Ainsi, le centre de la figure de diffraction perd 75 % de l’énergie lumineuse dans le cas de la plaque photographique.

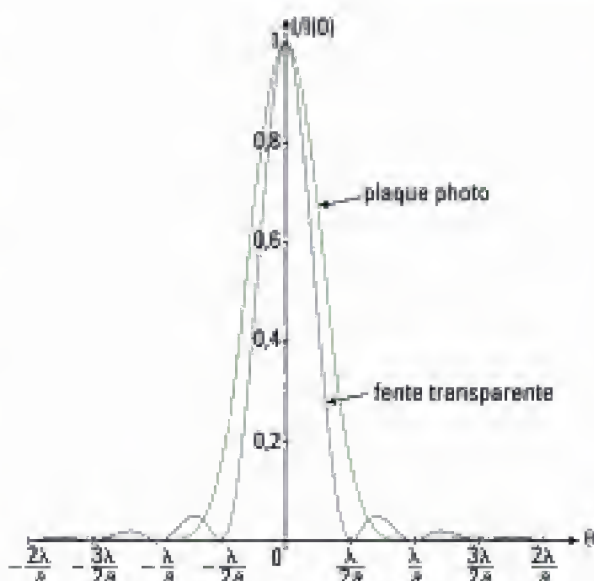


Figure 2

Commentaire : les lobes secondaires (ou « pieds ») sont beaucoup plus faibles en amplitude. On parle ainsi d’**apodisation**.

Exercice 6

1) • Position relative des cheveux

Tout d’abord, il faut définir le type de pupille diffractante auquel peut s’apparenter le cheveu. Il s’agit ici d’un obstacle infiniment fin, plutôt opaque, dont la largeur est beaucoup plus petite que la longueur. Grâce au théorème de Babinet, on peut par ailleurs affirmer que la figure de diffraction est identique à celle que produirait une ouverture transparente de mêmes dimensions. Nous en déduisons que le cheveu diffracte la lumière incidente telle une fente fine, ce que confirme effectivement la photographie puisque l’on observe trois figures de diffraction chacune essentiellement étalée dans une seule direction, dont les taches centrales sont approximativement deux fois plus larges que les taches secondaires (aux erreurs de lecture près).

Précisons à présent la position de chacun des cheveux. Pour ce faire, il suffit de rappeler qu’une fente fine diffracte essentiellement dans la direction où la fente est la plus fine. Ainsi :

– la figure de diffraction verticale ① correspond à un cheveu ① horizontal;

– la figure de diffraction ② correspond à un cheveu ②;

– la figure de diffraction ③ correspond à un cheveu ③.

D’où la disposition ci-contre des cheveux sur le porte objet.



• Ordre de grandeur du diamètre b d’un cheveu

La mesure doit ici être faite sur la figure de diffraction ②. La qualité de la photo ne permet pas de mesurer la distance sur l’écran qui correspond au maximum principal de la tache de diffraction. La mesure de l’étendue moyenne ℓ d’un lobe secondaire sur l’écran est ici voisine de 2,7 cm si on tient compte de l’échelle proposée. Pour une distance D entre l’écran et la pupille, la distance angulaire correspondante est :

$$\theta \approx \frac{\lambda_0}{b}$$

puisque la largeur de l’obstacle est ici le diamètre du cheveu. Avec $D \cdot \theta = \ell$, il vient :

$$b = \frac{\lambda_0 D}{\ell} \quad \text{A.N. : } b = 47 \, \mu\text{m}.$$

2) • Forme de la première pupille

Nous observons que la tache centrale est carrée et que les taches secondaires sont de mêmes dimensions. Il s'agit donc d'une **pupille carrée** et qui est **centrée sur l'axe optique** puisque la figure de diffraction est symétrique par rapport au centre F' de l'écran (pour réaliser une telle pupille expérimentalement, on utilise deux fentes de largeur réglable ajustées à la même valeur et croisées à 90° l'une de l'autre).

• Dimensions de la première pupille

Pour déterminer la largeur b de la pupille, on mesure la longueur ℓ_1 de la tache centrale de diffraction car c'est ici la mesure la plus précise. Avec l'échelle, on trouve $\ell_1 \approx 10$ mm, distance qui correspond à la quantité $f' \frac{2\lambda_0}{b}$ si on note f' la distance focale de la lentille de projection. Ainsi :

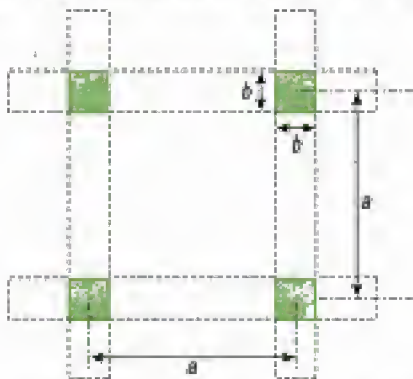
$$b = f' \frac{2\lambda_0}{\ell_1} \quad \text{A.N. : } b = 0,1 \text{ mm.}$$

3) • Forme de la deuxième pupille

On observe que la figure de diffraction est semblable à la précédente à ceci près qu'elle est « découpée » à l'horizontale et à la verticale. On peut émettre l'hypothèse qu'il s'agit d'un phénomène d'interférences, ici dans les deux directions de l'espace : la pupille est donc constituée de plusieurs ouvertures (ici de mêmes dimensions) régulièrement espacées horizontalement et verticalement.

• Dimensions de la deuxième pupille

L'énoncé confirme l'étude qualitative précédemment menée. Mettons en évidence les caractéristiques géométriques qu'il va falloir déterminer :



Sur la figure ci-contre, nous avons mis en évidence un moyen de réaliser une telle pupille : on superpose, dans deux plans distincts, deux paires de fentes de Young identiques et placées à 90° l'une de l'autre.

Pour déterminer la largeur b d'une ouverture carrée, on procède comme dans le cas précédent en mesurant la largeur de la tache centrale qui correspond à une distance ℓ_2 voisine de 3,8 mm donc :

$$b = f' \frac{2\lambda_0}{\ell_2} \approx 0,3 \text{ mm.}$$

Pour déterminer l'écartement a entre deux ouvertures carrées, on doit mesurer l'écartement entre deux franges d'interférences consécutives qui correspond ici à une distance ℓ_3 voisine de 1,2 mm. Or on sait que l'interfrange angulaire associé aux franges d'interférences s'écrit :

$$\frac{\lambda_0}{a}, \text{ donc : } a = f' \frac{\lambda_0}{\ell_3} \approx 0,5 \text{ mm.}$$

4) • Translation de la pupille diffractante parallèlement à elle-même

L'étude théorique effectuée en cours montre que ni le terme de diffraction ni le terme d'interférence qui sont présents dans l'expression de l'intensité diffractée en un point M de l'écran ne dépendent du centre de la pupille. Par conséquent, la figure de diffraction est **invariante** pour toute translation de la pupille.

• Mise en rotation de la pupille autour de son axe optique

Une rotation de la pupille autour de son axe optique modifie les directions dans l'espace de sa plus grande et plus petite dimension sans autre modification de la pupille. La figure de diffraction va donc elle aussi **tourner du même angle et dans le même sens**.

On peut distinguer deux cas :

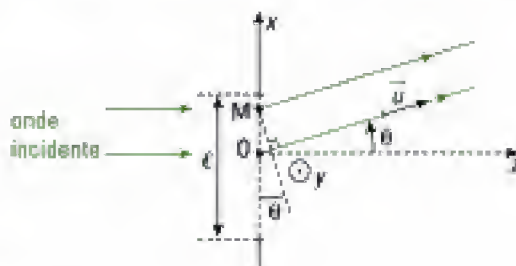
- l'onde incidente et l'axe optique de la lentille de projection sont perpendiculaires au plan de la pupille auquel cas la figure conserve la même allure ;
- l'onde incidente est oblique et la figure de diffraction est centrée sur le point d'intersection de cette direction et de l'écran, c'est-à-dire un foyer secondaire image. Il y a rotation de la figure autour de ce point et celle-ci se déforme.

• **Comment déplacer le centre d'une figure de diffraction sans autre modification ?**

Pour déplacer la figure de diffraction dans le plan d'observation, il suffit de faire varier l'angle d'incidence sur la pupille, ce qui revient à **déplacer la source** (dès lors, la nouvelle figure de diffraction est centrée sur la nouvelle image géométrique de la source).

Exercice 7

On établit l'expression de l'amplitude diffractée dans la direction θ (cf. méthode n° 1).



On choisit le rayon diffracté en O comme origine des phases.

Le déphasage entre les ondes diffractées en M d'abscisse x et en O s'écrit donc :

$$\varphi = \vec{k} \cdot \vec{OM} = k \vec{u} \cdot \vec{OM} \quad \left(k = \frac{2\pi}{\lambda} \right)$$

avec : $\vec{u} \cdot \vec{OM} = x \cdot \sin \theta = x \cdot \theta$ en prenant $\theta \ll 1$ (approximation paraxiale).

Donc :

$$\underline{E}(\theta) = K \cdot E_{\text{inc}} \cdot \iint_{(S)} z(x) \cdot e^{i\vec{k} \cdot \vec{OM}} \cdot dx \, dy = \frac{K \cdot E_{\text{inc}}}{2} \cdot \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} dy \cdot \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi x}{a} \right) \right] \cdot e^{ikx\theta} \cdot dx$$

avec $\cos \left(\frac{2\pi}{a} x \right) = \frac{e^{j\frac{2\pi}{a}x} + e^{-j\frac{2\pi}{a}x}}{2}$, donc :

$$\begin{aligned} \underline{E}(\theta) &= \frac{K \cdot E_{\text{inc}}}{2} \cdot L \cdot \left[\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} e^{ikx\theta} \cdot dx + \frac{1}{2} \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} e^{j\left(\frac{2\pi}{a} + k\theta\right)x} \cdot dx + \frac{1}{2} \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} e^{j\left(k\theta - \frac{2\pi}{a}\right)x} \cdot dx \right] \\ &= \frac{K \cdot E_{\text{inc}} \cdot L}{2} \left[\ell \cdot \text{sinc} \left(\frac{k\theta \cdot \ell}{2} \right) + \frac{\ell}{2} \cdot \text{sinc} \left[\left(\frac{\pi}{a} + \frac{k\theta}{2} \right) \cdot \ell \right] + \frac{\ell}{2} \cdot \text{sinc} \left[\left(\frac{k\theta}{2} - \frac{\pi}{a} \right) \cdot \ell \right] \right] \end{aligned}$$

où $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Donc :

$$\underline{E}(\theta) = \frac{K \cdot E_{\text{inc}} \cdot L \cdot \ell}{2} \cdot \left[\underbrace{\text{sinc} \left(\frac{\pi\theta \cdot \ell}{\lambda} \right)}_{(1)} + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\text{sinc} \left[\pi \left(\frac{\theta}{\lambda} + \frac{1}{a} \right) \ell \right]}_{(2)} + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\text{sinc} \left[\pi \left(\frac{\theta}{\lambda} - \frac{1}{a} \right) \ell \right]}_{(3)} \right]$$

Les trois termes (1), (2) et (3) sont des fonctions sinus cardinal : (1) est centré sur $\theta = 0$, (2) sur $\theta = -\frac{\lambda}{a}$ et (3) sur $\theta = \frac{\lambda}{a}$. Les maximums secondaires de chacun des trois termes sont situés à la

distance angulaire $(2m+1) \cdot \frac{\lambda}{2\ell}$ comptée à partir des maximums principaux respectifs. Or :

$$\ell \gg a \Leftrightarrow \frac{\lambda}{\ell} \ll \frac{\lambda}{a} \Rightarrow \frac{\lambda}{2\ell} \ll \frac{\lambda}{a}$$

Cette dernière inégalité montre que les trois termes sont situés à des directions θ suffisamment éloignées les unes des autres pour considérer qu'elles ne se recouvrent presque pas. Par conséquent, on ne commet pas de grosse erreur en ne conservant que les carrés de ces termes pour exprimer l'intensité lumineuse $I(\theta)$ diffractée dans la direction θ . Il vient alors :

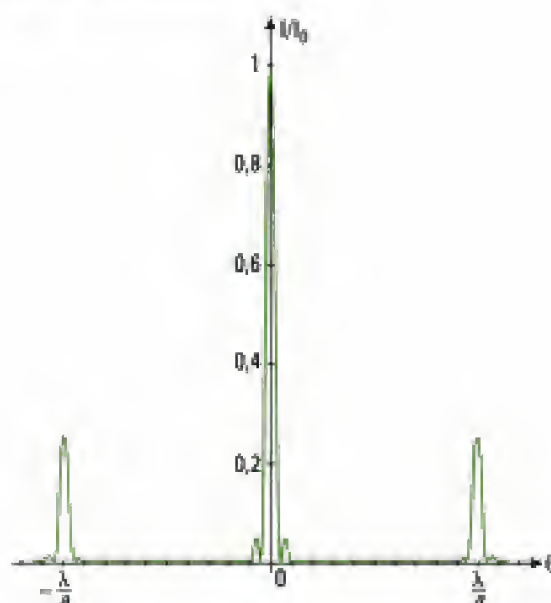
$$I(\theta) = \underline{E}(\theta) \cdot \underline{E}^*(\theta)$$

$$= \left(\frac{K \cdot E_{mi} \cdot L \cdot \ell}{2} \right)^2 \cdot \left[\text{sinc}^2 \left(\frac{\pi \theta \ell}{\lambda} \right) + \frac{1}{4} \text{sinc}^2 \left[\pi \left(\frac{\theta}{\lambda} + \frac{1}{a} \right) \ell \right] + \frac{1}{4} \text{sinc}^2 \left[\pi \left(\frac{\theta}{\lambda} - \frac{1}{a} \right) \ell \right] \right].$$

Soit en posant $I_0 = \left(\frac{K \cdot E_{mi} \cdot L \cdot \ell}{2} \right)^2$:

$$I(\theta) = I_0 \cdot \left[\text{sinc}^2 \left(\frac{\pi \theta \ell}{\lambda} \right) + \frac{1}{4} \text{sinc}^2 \left[\pi \left(\frac{\theta}{\lambda} + \frac{1}{a} \right) \ell \right] + \frac{1}{4} \text{sinc}^2 \left[\pi \left(\frac{\theta}{\lambda} - \frac{1}{a} \right) \ell \right] \right].$$

Nous donnons ci-dessous l'allure de l'intensité :



Commentaires :

– On observe seulement trois ordres d'interférences avec ce réseau $(0, \pm 1)$.

– La forme des sillons est donc sinusoïdale et le profil du réseau peut être schématisé ci-contre. Comme le pas a du réseau est très faible devant ℓ , on a l'équivalent d'une succession de fentes espacées de a .



– Ce type de réseau peut être obtenu par holographie en éclairant une plaque photographique, tel que cela a été vu dans l'exercice 2 du chapitre 3.

Exercice 8

• Analyse qualitative préalable

L'argument de la fonction de transmission n'est pas constant en tout point M de la pupille diffractante. En effet, les rayons diffractés et qui ont traversés la lame de verre ont subi un retard de

phase $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (n - 1) \cdot e$ supplémentaire. Par ailleurs, les réflexions sur les faces de la lame de verre

s'accompagnent nécessairement d'une diminution d'amplitude, une partie de l'énergie étant toujours perdue par réflexion.

Hidden page

$$\underline{E}(\theta) = \frac{Kab}{2} E_{mi} \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi a \theta}{2\lambda}\right) \cdot e^{-j\frac{\pi}{\lambda}(n-1)\varepsilon} \cdot \left[(1 + \varepsilon_0) \cdot \cos\left[\frac{\pi}{\lambda}\left[(n-1)\varepsilon - \frac{a\theta}{2}\right]\right] + j(1 - \varepsilon_0) \cdot \sin\left[\frac{\pi}{\lambda}\left[(n-1)\varepsilon - \frac{a\theta}{2}\right]\right] \right].$$

L'intensité diffractée dans la direction θ s'écrit donc :

$$I(\theta) = \frac{(Kab E_{mi})^2}{4} \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{\pi a \theta}{2\lambda}\right) \cdot \left\{ (1 + \varepsilon_0)^2 \cdot \cos^2\left[\frac{\pi}{\lambda}\left[(n-1)\varepsilon - \frac{a\theta}{2}\right]\right] + (1 - \varepsilon_0)^2 \cdot \sin^2\left[\frac{\pi}{\lambda}\left[(n-1)\varepsilon - \frac{a\theta}{2}\right]\right] \right\}.$$

Après simplification, on trouve :

$$I(\theta) = \frac{(Kab E_{mi})^2}{4} \text{sinc}^2\left(\frac{\pi a \theta}{2\lambda}\right) \left\{ (1 - \varepsilon_0)^2 + 4\varepsilon_0 \cos^2\left[\frac{\pi}{\lambda}\left[(n-1)\varepsilon - \frac{a\theta}{2}\right]\right] \right\}$$

Commentaires :

- Lorsque l'argument de la fonction de transmission ε de la pupille diffractante varie d'un point à l'autre, on dit qu'il s'agit d'un *objet diffractant de phase*. Dans le cas présent, on peut effectivement dire que l'argument de ε varie dès que x change de signe. On peut en particulier avoir des variations continues de l'argument comme par exemple avec une lentille mince dont l'étude avait été faite en exercice 6 du chapitre 1. Nous invitons le lecteur à reprendre les résultats de cet exercice.



Dans certains dispositifs de ce type, on peut rencontrer le cas où l'onde incidente traverse une lame de verre mais dont la dimension transversale $\frac{a}{2}$ est très grande devant la longueur d'onde λ . Dans ce cas, il ne faut surtout pas entamer un calcul mathématique tel que celui qui vient d'être effectué car il n'y a alors plus de diffraction dans la direction x , sauf pour $\theta = 0$! (Voir figure 15.b du cours.)

- De même, le module de ε varie lorsque x change de signe. Cette pupille est donc également un objet diffractant d'amplitude.

Exercices de niveau 3

Exercice 9

1) On demande ici d'exprimer l'amplitude diffractée par une pupille de longueur L grande devant sa largeur $b = a \cdot \cos \alpha$. Le calcul est identique à celui qui a été fait en cours dans le cas de la fente rectangulaire et qui conduit ici avec les notations de l'exercice à :

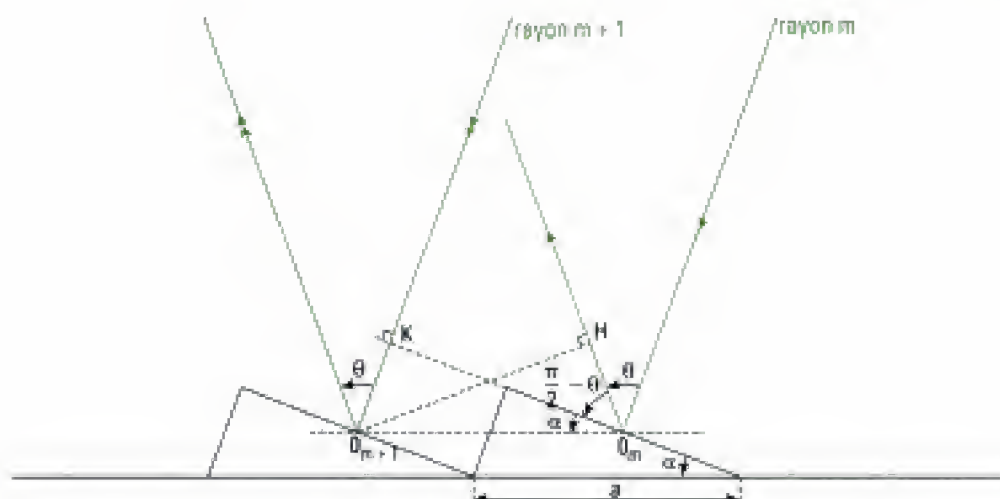
$$\underline{E}(\theta) = K E_{mi} L b \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi}{\lambda} \cdot b \sin \theta\right).$$

2) • Amplitude diffractée par l'ensemble du réseau

Notons φ le déphasage « à l'infini » entre les ondes diffractées par deux bandes réfléchissantes successives. L'amplitude diffractée $\underline{E}_r(\theta)$ par l'ensemble du réseau dans la direction θ s'écrit alors :

$$\underline{E}_r(\theta) = \underline{E}(\theta) \sum_{m=1}^N e^{j(m-1)\varphi} = \underline{E}(\theta) \cdot e^{j\frac{N-1}{2}\varphi} \cdot \frac{\sin\left(N\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}.$$

Pour expliciter le déphasage $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \delta$, on effectue une construction géométrique pour exprimer la différence de marche δ entre les ondes diffractées dans la direction θ pour deux bandes réfléchissantes successives.



La différence de marche δ du rayon $m+1$ par rapport au rayon m s'écrit ici :

$$\delta = O_{m+1}K - O_mH$$

avec : $O_{m+1}K = O_mO_{m+1} \cdot \sin \alpha = a \cdot \sin \alpha$

$$O_mH = O_mO_{m+1} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \frac{\pi}{2} + \theta\right) = a \cdot \sin(\theta - \alpha)$$

donc : $\delta = a \cdot [\sin \alpha - \sin(\theta - \alpha)]$

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \delta = \frac{2\pi a}{\lambda} \cdot [\sin \alpha - \sin(\theta - \alpha)] \quad \text{et} \quad \underline{E}_r(\theta) = \underline{E}(\theta) \cdot e^{j \frac{m-1}{2} \varphi} \cdot \frac{\sin\left(N \frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

• Intensité diffractée dans la direction θ

$$I_r(\theta) = \underline{E}_r(\theta) \cdot \underline{E}_r^*(\theta) = \underline{E}(\theta) \cdot \underline{E}^*(\theta) \cdot \left[\frac{\sin\left(N \frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \right]^2$$

Soit, en posant $I(\theta) = \underline{E}(\theta) \cdot \underline{E}^*(\theta)$ qui représente l'intensité diffractée par une seule bande dans la direction θ :

$$I_r(\theta) = I(\theta) \cdot \left[\frac{\sin\left(N \frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \right]^2 \quad \text{avec : } I(\theta) = (KE_m L b)^2 \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{\pi}{\lambda} b \cdot \sin \theta\right)$$

3) L'ordre d'interférence p est défini par la relation :

$$\delta = a \cdot [\sin \alpha - \sin(\theta - \alpha)] = p \cdot \lambda$$

Par ailleurs, si le pic d'interférence d'ordre p_0 correspondant coïncide avec le maximum principal de diffraction, on doit avoir $\theta = 0$. Ainsi :

$$2a \cdot \sin \alpha = p_0 \cdot \lambda, \text{ soit : } \underline{p_0 = \frac{2a \cdot \sin \alpha}{\lambda}}$$

A.N. : $p_0 = \frac{2 \times 2 \cdot 10^{-6} \times \sin 15^\circ}{0,5 \cdot 10^{-6}} \approx 2$ (on arrondit le résultat à l'entier le plus proche).

4) Le pic d'interférence d'ordre $p_0 = 2$ coïncide avec le maximum principal de la tache de diffraction à $\theta = 0$.

Hidden page

Hidden page

Polarisation de la lumière¹

Introduction

Dans ce chapitre, nous retrouvons l'influence de la nature vectorielle de la lumière. Tout au long de cet ouvrage, nous avons vu que la lumière est un outil permettant de mieux connaître la matière. De la même manière, les propriétés de polarisation des ondes lumineuses contribuent à cette connaissance, toujours en évolution. Ainsi, les écrans plats comme ceux des calculatrices font appel à un état de la matière, les cristaux liquides, éclairés en lumière polarisée.

Plan du chapitre 7

A. Modèle vectoriel de la lumière – Polarisations rectiligne, circulaire, elliptique . .	286
B. Production d'une lumière polarisée rectilignement	290
C. La biréfringence – Les lames à retard	294
D. Production et analyse d'une lumière totalement polarisée	298
E. Méthode d'analyse d'une lumière totalement polarisée ou non polarisée	301
F. Interférences en lumière polarisée	302
<i>Méthodes</i>	
L'essentiel	303
<i>Énoncés des exercices</i>	305
<i>Indications</i>	307
<i>Solutions des exercices</i>	308

1. Ce chapitre concerne les filières MP et PC et la partie « lames à retard » ne concerne que la filière PC.

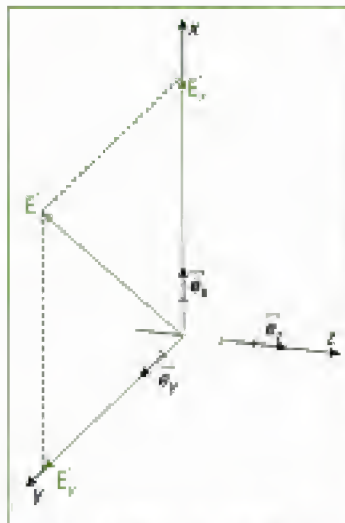


Fig. 1 – Situation du champ électrique pour une onde plane se propageant dans la direction Oz .

A. Modèle vectoriel de la lumière – Polarisation rectiligne, circulaire, elliptique

A.1. Le modèle vectoriel

Nous avons vu au chapitre 1 que le modèle vectoriel de la lumière, qui prend en compte le champ électrique $\vec{E}(r, t)$ associé à la propagation d'une onde lumineuse, permet de comprendre la plupart des effets optiques de la lumière puisque le champ électrique en est la cause. L'onde lumineuse est transversale : les vecteurs \vec{E} et \vec{B} sont orthogonaux à la direction de propagation.

Dans ce chapitre, nous ne considérerons que des *ondes lumineuses planes*, le champ électrique étant alors contenu dans un plan d'onde. Dans ce cas, et pour une onde se propageant dans la direction Oz , la situation est celle de la figure 1, rapportée au trièdre de référence $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Pour une onde lumineuse plane *monochromatique*, ce champ \vec{E} s'écrit $\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y$ de composantes :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{mx} \cos(\omega t - kz - \varphi_x) \\ E_{my} \cos(\omega t - kz - \varphi_y) \\ 0 \end{pmatrix}$$

les amplitudes E_{mx} et E_{my} étant connues et positives. Les deux composantes ont la même pulsation.

Il est important de donner un support visuel aux polarisations rectiligne, circulaire et elliptique avec lesquelles nous allons travailler. C'est ce que nous proposons de faire dans le paragraphe suivant.

A.2. États de polarisation d'une onde et représentation dans un plan d'onde

Le plus simple est de représenter ce que l'on observe au cours du temps dans un plan d'onde donné de coordonnée $z = z_0 = \text{cte}$. Dans ce plan, le vecteur \vec{E} évolue dans un rectangle de côtés $2E_{my}$ et $2E_{mx}$ (figure 2).

Par un choix convenable de l'origine des temps, il est possible de simplifier les écritures précédentes et de ne garder que la différence de phase $\Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x$, seule grandeur importante. Les composantes du champ s'écrivent alors :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{mx} \cos(\omega t - kz) \\ E_{my} \cos(\omega t - kz - \Delta\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

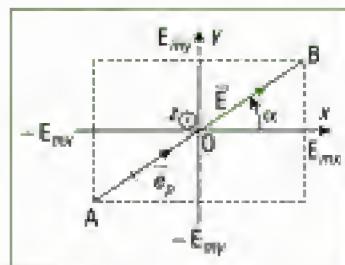


Fig. 2 – Observation de l'évolution du vecteur champ électrique au cours du temps, dans un plan d'onde de coordonnée z_0 pour une polarisation rectiligne. Le champ oscille le long de la direction fixe (AB) telle que :

$$\tan(\alpha) = \frac{E_{my}}{E_{mx}}$$

A.2.1 – Polarisation rectiligne

• Si $\Delta\varphi = 0$, $\frac{E_y(t)}{E_x(t)} = \frac{E_{my}}{E_{mx}} = \text{cte}$. Le champ électrique \vec{E} garde une direction fixe dans le plan d'onde.

Définition 1

Si l'extrémité du vecteur champ électrique décrit au cours du temps un segment de direction fixe dans n'importe quel plan d'onde, l'état de polarisation de l'onde plane monochromatique est dit **rectiligne**.

Si l'on repère la direction fixe du champ électrique par le vecteur unitaire \vec{e}_p , l'onde est dite polarisée rectilignement selon ce vecteur (figure 2).

On représente alors l'évolution de l'extrémité du vecteur champ au cours du temps dans un plan d'onde de coordonnée z_0 (figure 2).

Le champ \vec{E} garde une direction fixe dans le plan d'onde et oscille sinusoidalement le long de cette direction avec une amplitude $E_m = \sqrt{E_{mx}^2 + E_{my}^2}$.

- Si $\Delta\varphi = \pi$, $\frac{E_y(t)}{E_x(t)} = -\frac{E_{my}}{E_{mx}} = \text{cte}$. Le champ est alors polarisé rectilignement dans une direction (A'B') symétrique de la précédente par rapport à l'axe Oy.

Définition 2

La convention d'orientation du plan d'onde est celle dans laquelle le vecteur d'onde \vec{k} pointe vers l'observateur¹.

A.2.2 - Polarisation elliptique

- Si $\Delta\varphi$ n'est pas un multiple de π , nous avons $E_x = E_{mx} \cos(\omega t - kz)$ et $E_y = E_{my} \cos(\omega t - kz - \Delta\varphi) = E_{my} [\cos(\omega t - kz) \cos(\Delta\varphi) + \sin(\omega t - kz) \sin(\Delta\varphi)]$.

Ainsi, $\cos(\omega t - kz) = \frac{E_x}{E_{mx}}$ et donc $\sin(\omega t - kz) = \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_{mx}}\right)^2}$.

En remplaçant ces dernières expressions dans E_y , nous obtenons :

$$E_y = E_{my} \left[\frac{E_x}{E_{mx}} \cos(\Delta\varphi) + \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_{mx}}\right)^2} \sin(\Delta\varphi) \right]$$

et aussi : $\frac{E_y}{E_{my}} - \frac{E_x}{E_{mx}} \cos(\Delta\varphi) = \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_{mx}}\right)^2} \sin(\Delta\varphi)$.

En élevant au carré les deux termes de l'égalité et en réordonnant, il vient :

$$\frac{E_x^2}{E_{mx}^2} + \frac{E_y^2}{E_{my}^2} - \frac{2E_x E_y}{E_{mx} E_{my}} \cos(\Delta\varphi) = \sin^2(\Delta\varphi).$$

Cette équation est celle d'une ellipse décrite par l'extrémité du vecteur \vec{E} .

Définition 3

Si l'extrémité du vecteur champ électrique décrit au cours du temps une ellipse dans n'importe quel plan d'onde, l'état de polarisation de l'onde plane monochromatique est dit **elliptique**.

- Le sens de parcours de l'ellipse s'obtient en déterminant le sens de variation de la grandeur E_y lorsque E_x est maximal, soit $\omega t - kz = 0$. Comme $\left[\frac{dE_y}{dt}\right]_{(\omega t - kz) = 0} = \omega E_{my} \sin(\Delta\varphi)$, le sens de parcours de l'ellipse est ainsi déterminé par le signe de $\sin(\Delta\varphi)$.

Définition 4

La polarisation est dite **elliptique gauche** lorsque $\sin(\Delta\varphi) > 0$: l'ellipse est alors parcourue dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Dans le cas contraire, la polarisation est dite **elliptique droite**² (figure 3).

Définition 5

Le **degré d'ellipticité** (ou **ellipticité**) de l'onde polarisée elliptiquement est le rapport du demi-petit axe de l'ellipse à son demi-grand axe.

1. Nous supposons toujours que la propagation se fait selon Oz : \vec{k} est donc porté par Oz. Cette convention permet d'interpréter les états de polarisation de la figure 3.

2. Pour un observateur qui voit l'onde arriver vers lui, l'extrémité du champ sur l'ellipse se déplace vers la gauche ou vers la droite dans le plan d'onde.

Hidden page

Hidden page

B. Production d'une lumière polarisée rectilignement

Nous cherchons à produire une onde polarisée rectilignement c'est-à-dire dont le vecteur champ électrique garde une direction constante repérée par le vecteur unitaire \vec{e}_p . La production de ce type de lumière est essentielle pour l'étude des phénomènes de la polarisation.

Définition 8

Les dispositifs qui permettent de produire de la lumière polarisée rectilignement sont appelés **polariseurs**.

Nous présentons ci-après quelques polariseurs courants.

B.1. Les filtres dichroïques

Le dichroïsme est lié à l'absorption sélective de la lumière. En effet, le cours d'électromagnétisme montre que l'expression du champ électrique associé à une onde plane se déplaçant dans un milieu absorbant s'écrit :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{ax} \exp(-k_{ax} z) \cos(\omega t - kz) \\ E_{ay} \exp(-k_{ay} z) \cos(\omega t - kz - \Delta\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec k_{ax} et k_{ay} les coefficients d'amortissement de l'onde dans les directions Ox et Oy .

Si $k_{ax} \gg k_{ay}$, après la traversée d'une épaisseur e telle que $k_{ax}e \gg 1$, il y a absorption sélective de la composante du champ selon Ox . Le champ électrique est alors polarisé rectilignement selon $\vec{e}_p = \vec{e}_y$ en sortie du polariseur¹.

Un polariseur rectiligne est donc caractérisé par sa direction de polarisation \vec{e}_p .

Définition 9

On appelle **axe de polarisation** (ou direction de polarisation) d'un polariseur la direction du champ électrique correspondant à l'absorption minimale du polariseur.

Les polariseurs rectilignes de type polaroid¹ sont fabriqués à partir de ce principe. Ce sont en fait des films polarisants, composés d'une matière plastique transparente comprenant des éléments colorés absorbants. Ce film est étiré majoritairement dans une direction. Cette direction correspond à la direction d'absorption maximale du champ électrique et, en conséquence, le champ \vec{E} transmis est normal à cette direction.

• Convention de représentation

Nous adopterons le symbole de la figure 6 pour représenter un polariseur. La flèche indique la direction passante du champ électrique.

• Action d'un polariseur

Considérons un polariseur P recevant une onde incidente polarisée rectilignement dans la direction \vec{E}_i faisant l'angle α avec le polariseur P repéré par \vec{e}_p (figure 7). L'onde transmise \vec{E}_r , polarisée rectilignement au-delà du polariseur, a la direction de \vec{e}_p .

Un polariseur permet donc de projeter la vibration incidente sur l'axe du polariseur.

1. Polaroid est une marque déposée. L'invention du film polarisant « Polaroid » en 1938 est due à E.Land (1909-1991), aussi inventeur de l'appareil photographique du même nom. Les caractéristiques d'un filtre polaroid sont le coefficient de transmission maximal en intensité (de l'ordre de 30%) et son pouvoir d'extinction de l'ordre de 10^{-4} (rapport de l'intensité transmise dans la direction d'extinction et de l'intensité transmise dans la direction de polarisation). Au passage du polariseur, l'onde transmise polarisée subit donc aussi une absorption. La forte absorption d'un filtre polaroid ne permet pas de l'utiliser avec des sources intenses.



Fig. 6 – Symbole d'un polariseur.

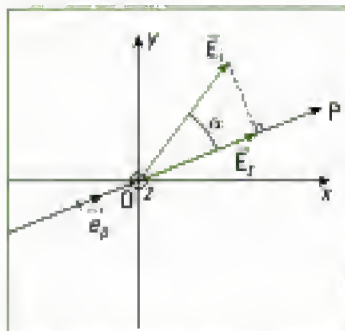


Fig. 7 – Projection de la vibration incidente sur l'axe d'un polariseur.



Fig. 8.a – Paire de polariseurs-analyseurs au laboratoire.



Fig. 8.b – Le pourtour de l'analyseur ou du polariseur est gradué en degrés. L'aiguille permet de tourner le disque polarisant situé au centre, et de mesurer ou repérer cette rotation.

L'opération de projection s'obtient en faisant le produit scalaire des vecteurs associés. Ainsi, $E_t = \vec{E}_i \cdot \vec{e}_p$ et :

$$\vec{E}_t = E_i \vec{e}_p = (\vec{E}_i \cdot \vec{e}_p) \vec{e}_p \quad (\text{figure 7}).$$

Ceci s'applique bien évidemment à la lumière naturelle.

Un polariseur peut transformer un faisceau de lumière naturelle parallèle en un faisceau de lumière parallèle polarisée rectilignement.

• Polariseur ou analyseur ?

Dans la situation expérimentale précédente, nous pouvons imaginer que la lumière incidente était créée par un autre polariseur P_0 placé en amont du polariseur P qui joue donc le rôle d'analyseur de lumière.

Le même objet peut donc jouer le rôle de polariseur ou d'analyseur.

Ainsi, pour la direction de l'analyseur P qui éteint la lumière transmise, la polarisation de l'onde incidente est à angle droit de cette direction.

Rien ne distingue donc un polariseur d'un analyseur, si ce n'est leur position dans le montage. Il sont tous deux constitués du même objet physique : un film dichroïque par exemple (figures 8.a et 8.b).

• Polariseur et analyseur croisés

Définition 10

Le polariseur et l'analyseur étant à angle droit l'un de l'autre, ils sont dits **croisés**. Pour cette position, nous avons $E_t = 0$ et l'intensité transmise à la sortie de l'analyseur est donc nulle.

Un analyseur permet de mettre en évidence une onde polarisée rectilignement en l'éteignant.

Application 1 Polariseur éclairé en lumière naturelle

Un faisceau parallèle de lumière naturelle, d'intensité I_0 , éclaire un polariseur. Quelles sont les caractéristiques du faisceau transmis ?

Solution

Les composantes de la lumière naturelle incidente s'écrivent :

$$\vec{E}_i = \begin{pmatrix} E_{ix}(t) \cos(\omega t - kz) \\ E_{iy}(t) \cos(\omega t - kz - \Delta\phi_y(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad \vec{E}_i = \begin{pmatrix} E_{ix}(t) \\ E_{iy}(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec $E_{ix}(t)$ et $E_{iy}(t)$ variant de manière aléatoire.

À la date t , la situation est donnée par la figure ci-contre.

Le champ transmis est $E_t = \vec{E}_i \cdot \vec{e}_p$ et l'intensité transmise est :

$$I_t = 2\langle E_t^2 \rangle_t = 2\langle (\vec{E}_i \cdot \vec{e}_p)^2 \rangle_t = 2\langle (E_{ix} \vec{e}_x + E_{iy} \vec{e}_y) \cdot \vec{e}_p \rangle_t^2$$

$$= 2\langle [E_{ix} \cos(\theta) + E_{iy} \sin(\theta)]^2 \rangle_t = 2\langle [E_{ix}^2 \cos^2(\theta) + E_{iy}^2 \sin^2(\theta)] \rangle_t \quad \text{puisque} \quad \langle E_{ix} E_{iy} \rangle_t = 0.$$

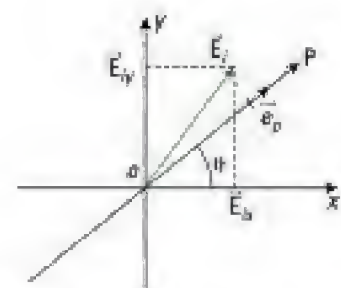
Or nous avons vu au paragraphe A.2.5 que $\langle E_{ix}^2 \rangle_t = \langle E_{iy}^2 \rangle_t$, ce qui donne : $I_t = 2\langle E_{ix}^2 \rangle_t$.

Au même paragraphe, nous avons établi que : $I_0 = 4\langle E_{ix}^2 \rangle_t$.

Nous en déduisons que l'intensité transmise par le polariseur est :

$$I_t = 2\langle E_{ix}^2 \rangle_t = \frac{I_0}{2}.$$

La moitié de l'intensité incidente est transmise par le polariseur.



Hidden page

Hidden page

Hidden page

1. Nous supposons ici parfaitement connues les directions de polarisation du polariseur et de l'analyseur. Ce n'est pas toujours le cas au laboratoire. Dans ce cas, on peut soit déterminer ces directions avec un polariseur de direction de polarisation connue, soit choisir une position particulière du polariseur et lui attribuer arbitrairement la direction de polarisation. Ceci demande de travailler par la suite seulement en positions relatives des lames les unes par rapport aux autres, ce qui ne gêne en rien les manipulations.

2. Conformément au chapitre 1, un retard de phase effectif est compté positivement.

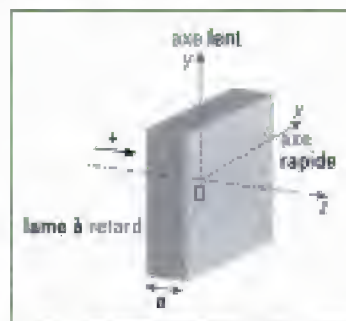


Fig. 12 – lame à retard : axe lent, axe rapide. L'origine de l'axe Oz est prise sur la face avant de la lame.

3. Nous avons examiné l'action de la lame sur la polarisation de l'onde incidente en laissant de côté l'atténuation de l'onde, conformément au programme.

4. Cette quantité $\frac{\lambda_0}{2}$ n'est pas l'épaisseur de la lame, mais une différence de chemins optiques le long des axes lent et rapide.

La lumière qui émerge de la lame a alors même direction que la direction de polarisation donnée par le polariseur : l'analyseur étant croisé, il éteint cette lumière.

Ces directions particulières de la lame sont appelées lignes neutres de la lame.

Pour trouver les lignes neutres d'une lame, il faut placer celle-ci entre polariseur et analyseur croisés et tourner cette lame : dès la première extinction, les lignes neutres de la lame sont déterminées puisqu'elles se confondent avec les directions de polarisation du polariseur et de l'analyseur¹.

De ces deux directions privilégiées, l'une est l'axe lent de la lame, que nous confondrons avec l'axe Oy , l'autre est l'axe rapide, confondu avec Ox ; dès lors, la composante qui se propage le long de Ox (respectivement Oy) le fait dans un milieu isotrope d'indice n_x (respectivement n_y) avec $n_y > n_x$ (figure 12).

C.2.2 – Retard de phase à la traversée de la lame

Le passage de ces deux vibrations orthogonales dans la lame d'épaisseur e s'accompagne d'un retard de phase $\Delta\phi_L$ de la vibration lente par rapport à la vibration rapide. Il s'exprime classiquement selon $\Delta\phi_L = (k_y - k_x)e$, avec

$$k_x = 2\pi \frac{n_x e}{\lambda_0} \text{ et } k_y = 2\pi \frac{n_y e}{\lambda_0} \text{ les modules des vecteurs d'ondes pour les deux}$$

vibrations orthogonales. Il vient donc² :

$$\Delta\phi_L = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_y - n_x) e.$$

C.2.3 – Action d'une lame à retard

Nous nous proposons d'examiner maintenant l'action d'une lame à retard sur une onde de polarisation quelconque arrivant sur cette lame.

À l'entrée de la lame, de coordonnées $z = 0$, nous avons :

$$\vec{E}_i = \begin{pmatrix} E_{mx} \cos(\omega t) \\ E_{my} \cos(\omega t - \Delta\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

et à la sortie de la lame, de coordonnées $z = e$, nous avons :

$$\vec{E}_e = \begin{pmatrix} E_{mx} \cos(\omega t - k_x e) \\ E_{my} \cos(\omega t - \Delta\phi - k_y e) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par un changement de date origine, nous obtenons³ :

$$\vec{E}_e = \begin{pmatrix} E_{mx} \cos(\omega t) \\ E_{my} \cos(\omega t - \Delta\phi - \Delta\phi_L) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il nous faut étudier l'influence du terme $\Delta\phi_L$ sur l'onde qui émerge de la lame. Nous allons limiter cette étude à quelques valeurs classiques de $\Delta\phi_L$.

• lame demi-onde

Définition 12

Une lame demi-onde est telle que $\Delta\phi_L = \pi$. Il lui correspond une différence de marche $\delta_L = \frac{\lambda_0}{2}$ entre les deux vibrations orthogonales⁴.

Comme $\Delta\varphi_L = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_y - n_x) e = \pi$, la lame n'est demi-onde que pour une longueur d'onde donnée.

Propriété 2

Une lame demi-onde transforme l'onde¹ incidente polarisée rectilignement qu'elle reçoit en une onde de direction de polarisation symétrique par rapport à l'une de ses lignes neutres.

Si la vibration rectiligne incidente \vec{E}_i fait l'angle α avec l'axe Ox (figure 2), à l'entrée de la lame, de coordonnée $z = 0$, pour l'onde incidente polarisée rectilignement, il vient, avec $E_{mx} = E_m \cos(\alpha)$, $E_{my} = E_m \sin(\alpha)$ et $\Delta\varphi = 0$:

$$\vec{E}_i = \begin{pmatrix} E_m \cos(\alpha) \cos(\omega t) \\ E_m \sin(\alpha) \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

À la sortie de la lame, de coordonnée $z = e^2$:

$$\vec{E}_e = \begin{pmatrix} E_m \cos(\alpha) \cos(\omega t) \\ E_m \sin(\alpha) \cos(\omega t - \pi) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m \cos(\alpha) \cos(\omega t) \\ -E_m \sin(\alpha) \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

La composante selon Ox est inchangée alors que la composante selon Oy change de signe. Dans ce cas, la vibration émergente est symétrique de la vibration incidente par rapport à l'axe Ox (figure 13).

Le tableau ci-dessous résume l'action d'une lame demi-onde sur différentes ondes polarisées incidentes :

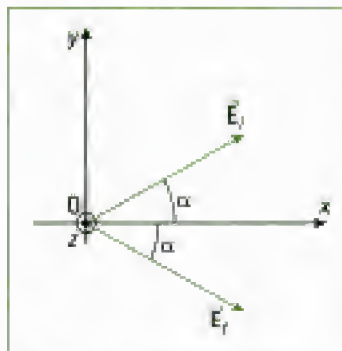


Fig. 13 – Action d'une lame demi-onde sur une onde polarisée rectilignement.

État de polarisation à l'entrée de la lame demi-onde	État de polarisation à la sortie de la lame demi-onde
rectiligne dans la direction d'une ligne neutre	rectiligne dans la même direction que la ligne neutre
rectiligne, inclinée dans une direction par rapport aux lignes neutres	rectiligne, symétrique de la vibration incidente par rapport à l'une des lignes neutres
circulaire	circulaire de sens opposé
elliptique dont les axes sont dans la direction des lignes neutres	elliptique identique, au sens de rotation près

Remarque : si les axes de l'ellipse sont inclinés par rapport aux lignes neutres de la lame, les axes de la polarisation elliptique de sortie sont symétriques des axes de la polarisation elliptique d'entrée, par rapport aux lignes neutres.

• Lame quart d'onde

Définition 13

Une lame quart d'onde est telle que $\Delta\varphi_L = \frac{\pi}{2}$. Il lui correspond une différence de marche $\delta_L = \frac{\lambda_0}{4}$ entre les deux vibrations orthogonales.

La lame n'est quart d'onde que pour une longueur d'onde donnée.

1. D'ores et déjà, nous ne précisons pas systématiquement « onde plane monochromatique ».

2. L'axe rapide est choisi confondu avec Ox.

Hidden page

D. Production et analyse d'une lumière totalement polarisée¹

Notre système visuel ne nous permet pas de percevoir la lumière polarisée. Aussi, il nous faut trouver des moyens de la produire et de la détecter.

Les résultats précédemment obtenus montrent qu'il existe plusieurs façons d'obtenir un état de polarisation souhaité, en combinant les lames, les polariseurs et les analyseurs, en les associant sur le banc d'optique et en observant les résultats à l'œil sur un écran ou avec un capteur si nécessaire.

Nous rappelons que l'onde incidente est supposée plane : il faudra donc réaliser expérimentalement ce type de faisceau. Nous avons par ailleurs bien souligné que les lames à retard demi-onde ou quart d'onde ne possédaient ces propriétés que pour une longueur d'onde donnée : il faut donc utiliser un filtre dont la bande passante est adaptée à ce type de matériel.

D.1. Production et analyse d'une lumière polarisée rectilignement

Tout dispositif précédemment étudié jouant le rôle de polariseur rectiligne (polaroïd, incidence de Brewster...) peut servir de polariseur. Inversement, tout polariseur peut servir d'analyseur. Le montage d'étude est le suivant :

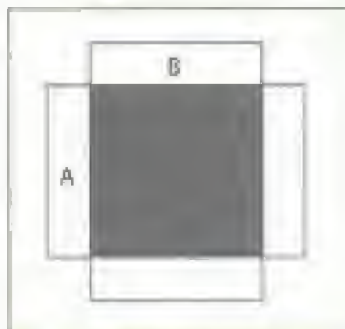


Fig. 15.a – Polaroïds croisés (cas de filtres dichroïques). À leur intersection, l'intensité de la lumière transmise est nulle. Leurs axes de polarisation sont à angle droit.



Fig. 15.b – Polaroïds décroisés (cas de filtres dichroïques). À leur intersection, la lumière passe. Leurs directions de polarisation sont parallèles.

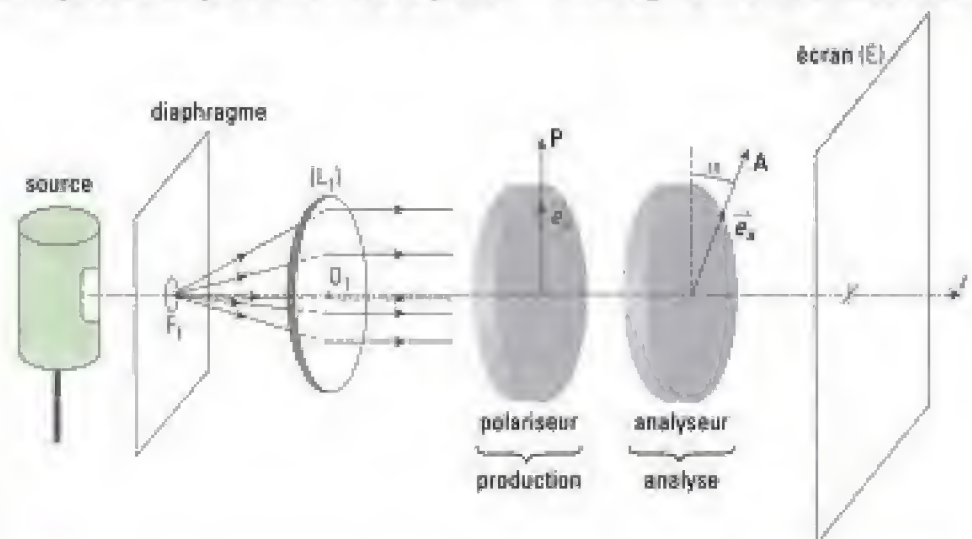


Fig. 14 – Montage de production et d'analyse d'une lumière polarisée rectilignement.

En tournant l'analyseur, on observe deux extinctions et deux situations d'intensité maximale par tour (figures 15.a et 15.b).

Nous pouvons aussi déterminer la direction de polarisation d'une lumière polarisée ou croiser les polariseur et analyseur, opération élémentaire à la base de nombreux autres montages.

Remarque : il arrive fréquemment que l'axe des polariseurs ou analyseurs ne soient pas marqués, ou que le marquage ait glissé.

Bien que l'on puisse travailler en repérage relatif, il est plus confortable de posséder la direction des axes des polariseurs et analyseurs utilisés.

Nous pouvons très rapidement retrouver cette direction, soit en utilisant un autre polariseur marqué correctement, soit en regardant une surface réfléchissante non métallique (verre, verni...) au voisinage de l'incidence de Brewster, et en cherchant à éteindre l'onde polarisée rectiligne produite par la réflexion « vitreuse », dont on connaît la direction de polarisation (cf. B.3).

D.2. Production d'une lumière polarisée circulairement

Pour obtenir une lumière polarisée circulairement, on peut utiliser un polariseur suivi d'une lame quart d'onde. Si le polariseur est orienté à 45° par rapport aux lignes neutres de la lame à retard, alors la vibration transmise est polarisée circulairement (cf. C.2.3).

• Mise en œuvre expérimentale

Croiser un analyseur et un polariseur. Filtrer la lumière en sortie de la lentille, comme à la figure 16, en accord avec la présence de la lame à retard. Placer la lame quart d'onde entre le polariseur et l'analyseur et chercher ses lignes neutres. Pour cela, tourner la lame jusqu'à obtenir l'extinction en sortie de l'analyseur. Repérer la position de la lame quart d'onde sur son vernier et tourner la lame d'un angle de 45° . L'onde à la sortie de la lame quart d'onde est alors polarisée circulairement.

Tourner ensuite l'analyseur, l'intensité de la lumière observée sur l'écran reste constante. En effet, l'intensité est proportionnelle à la moyenne du carré de l'amplitude et pour une vibration circulaire, cette amplitude est constante, quel que soit l'angle de rotation de l'analyseur.

D.3. Production et analyse d'une lumière polarisée elliptiquement

• Production : mise en œuvre expérimentale

Pour cela, on utilise une lame quart d'onde éclairée par une lumière polarisée orientée d'un angle α (20° par exemple) par rapport aux axes de la lame quart d'onde (figure 16). La lumière émergente est alors polarisée elliptiquement.

Croiser un analyseur et un polariseur. Filtrer la lumière en sortie de la lentille, comme à la figure 16, en accord avec la présence de la lame à retard. Placer la lame quart d'onde entre le polariseur et l'analyseur et chercher ses lignes neutres. Pour cela, tourner la lame jusqu'à obtenir l'extinction en sortie de l'analyseur. Repérer la position de la lame quart d'onde sur son vernier et tourner la lame d'un angle $\alpha = 20^\circ$ par exemple. L'onde à la sortie de la lame quart d'onde est polarisée elliptiquement.

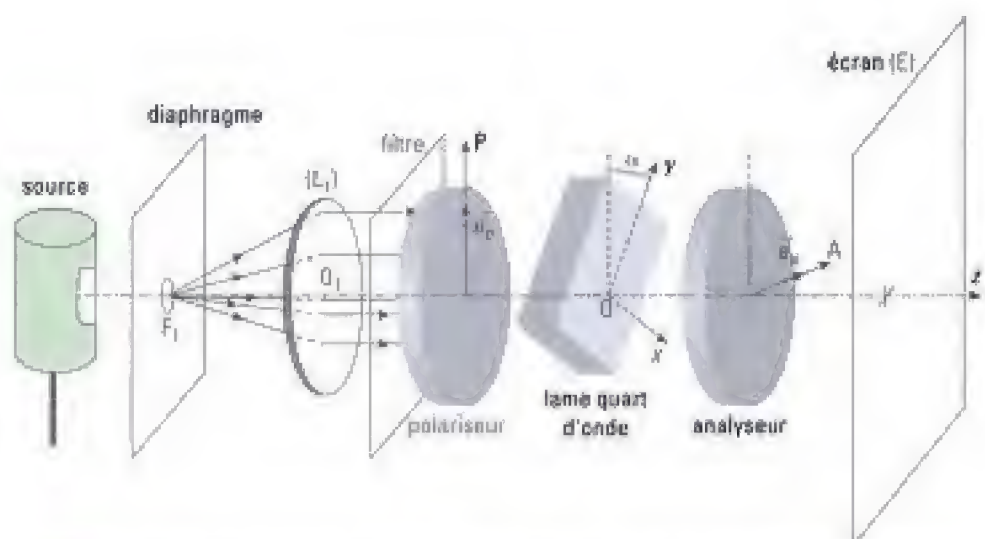


Fig. 16 – Montage de production et d'analyse d'une lumière polarisée elliptiquement.

Hidden page

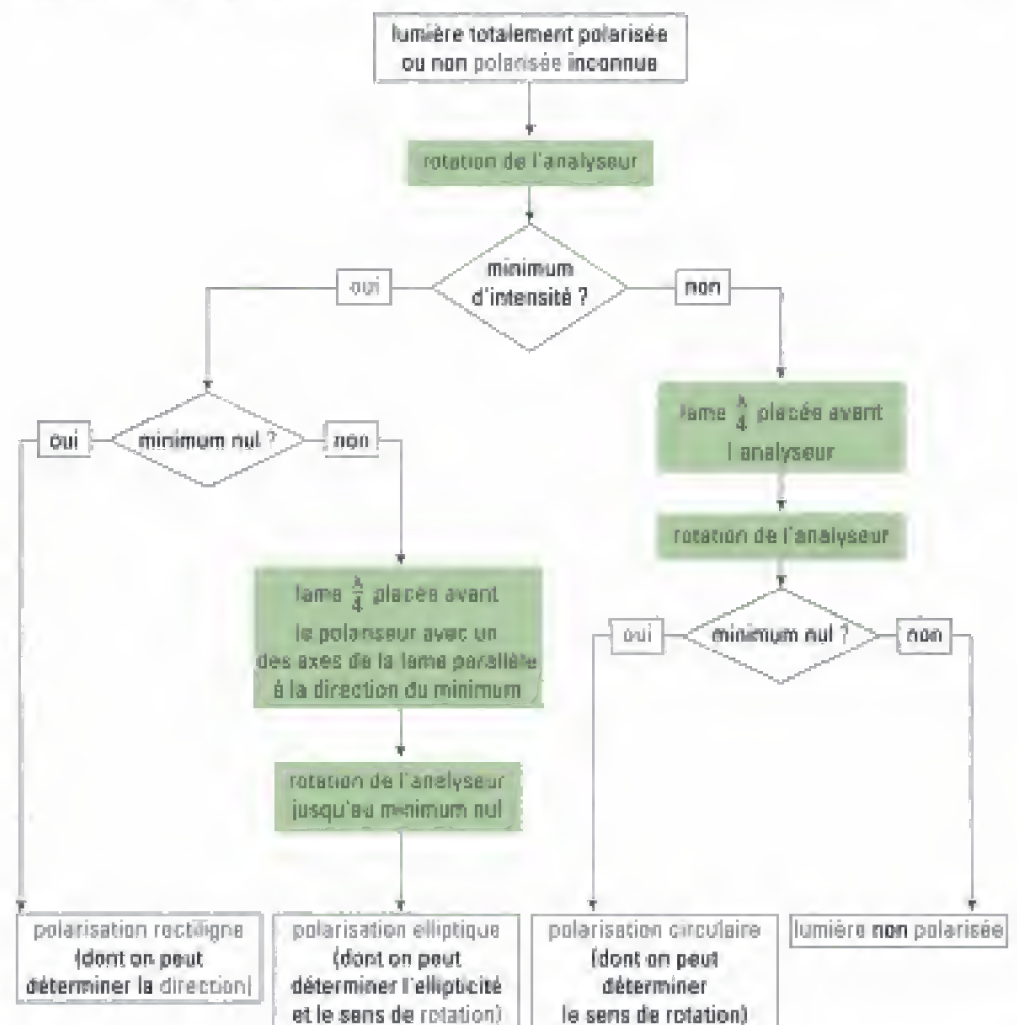
Sur le dessin de la figure 18, nous voyons qu'il faut tourner l'analyseur d'un angle $\beta < \frac{\pi}{2}$ à gauche, dans le sens de parcours de l'ellipse (gauche) afin de rétablir l'extinction de la lumière à la sortie de l'analyseur. En mesurant β , $\tan(\beta) = \frac{E_{oy}}{E_{ox}}$ donne le degré d'ellipticité.

D.4. Analyse d'une lumière polarisée circulairement

Le montage d'étude est le même que pour une onde polarisée elliptiquement et le raisonnement identique. L'angle β est alors égal à 45° (voir paragraphe C.2.3.). Le sens de rotation de l'analyseur pour obtenir l'extinction donne le sens de parcours du cercle.

E. Méthode d'analyse d'une lumière totalement polarisée ou non polarisée

Nous donnons ci-après un tableau résumant l'étude à mener pour analyser une onde de polarisation inconnue.



Hidden page

L'essentiel

✓ Modèle vectoriel – États de polarisation de la lumière

- Le modèle vectoriel de la lumière prend en compte le champ électrique $\vec{E}(r, t)$ associé à la propagation d'une onde lumineuse. L'onde lumineuse est **transversale**. Cette modélisation est nécessaire pour comprendre la polarisation de la lumière due à des systèmes optiques éclairés par des ondes lumineuses planes.

- La **polarisation d'une onde** est décrite par la trajectoire de l'extrémité du vecteur champ électrique, dans un plan d'onde donné, au cours du temps.

Selon la forme de ces trajectoires, on distingue les polarisations **rectiligne**, **circulaire** ou **elliptique**.

- La lumière naturelle est une lumière non polarisée.

✓ La lumière polarisée rectilignement

■ Production d'une lumière polarisée rectilignement

- Les dispositifs qui permettent de produire de la lumière polarisée rectilignement sont appelés **polariseurs**. Les filtres dichroïques, la polarisation par réflexion et la polarisation par diffusion permettent d'obtenir ce type de lumière. Un polariseur permet de « projeter » la vibration incidente sur l'axe du polariseur.

- Polariseur et analyseur sont deux mêmes objets : seule leur position dans le montage les différencie. Le polariseur et l'analyseur étant à angle droit l'un de l'autre, ils sont dits croisés. Pour cette position, l'intensité transmise au-delà de l'analyseur est nulle.

- Un analyseur permet de mettre en évidence une onde polarisée rectilignement en l'éteignant.

- Un polariseur peut transformer un faisceau de lumière naturelle parallèle en un faisceau de lumière parallèle polarisée rectilignement.

■ Loi de Malus

Si la direction de polarisation rectiligne d'une lumière incidente, d'intensité I_0 , fait un angle α avec l'axe d'un analyseur, alors l'intensité transmise par l'analyseur s'écrit :

$$I = I_0 \cos^2(\alpha) \text{ dans la lame.}$$

✓ La biréfringence – Les lames à retard

- Un milieu possédant deux indices de réfraction est dit **biréfringent**.

- Dans les **lames à retard**, le champ transverse d'une onde plane à l'incidence normale sur la lame peut être décomposé dans la lame en deux vibrations rectilignes perpendiculaires, indépendantes l'une de l'autre, se propageant avec des vitesses et des indices différents. Une de ces directions est appelée l'*axe lent* ; l'autre est l'*axe rapide*. À la sortie de la lame, l'onde est alors la résultante de ces deux vibrations émergentes.

Les deux directions orthogonales de la lame qui reçoivent une onde polarisée rectilignement et la transmettent sous forme d'une onde polarisée rectilignement de même direction que la vibration incidente, sont appelées *lignes neutres* de la lame.

Pour trouver les lignes neutres d'une lame, il faut placer celle-ci entre polariseur et analyseur croisés et la tourner. Dès la première extinction, les lignes neutres de la lame sont déterminées : elles se confondent avec les directions de polarisation du polariseur et de l'analyseur.

• Retard de phase à la traversée de la lame

Le passage des deux vibrations orthogonales dans la lame d'épaisseur e , d'indices n_y et n_x , s'accompagne d'un retard de phase $\Delta\varphi_L$ de la vibration lente par rapport à la vibration rapide :

$$\Delta\varphi_L = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_y - n_x) e.$$

• Lame demi-onde

- Une lame demi-onde est une lame telle que $\Delta\varphi_L = \pi$. Il lui correspond une différence de marche $\delta_L = \frac{\lambda_0}{2}$. Une lame n'est demi-onde que pour une longueur d'onde donnée.
- Une lame demi-onde transforme une onde incidente polarisée rectilignement en une onde polarisée rectilignement de direction de polarisation symétrique de la direction de polarisation incidente par rapport à une des lignes neutres de la lame.

• Lame quart d'onde

- Une lame quart d'onde est une lame telle que $\Delta\varphi_L = \frac{\pi}{2}$. Il lui correspond une différence de marche $\delta_L = \frac{\lambda_0}{4}$. Une lame n'est quart d'onde que pour une longueur d'onde donnée.
- Lorsqu'une lame quart d'onde reçoit une onde polarisée rectilignement, l'onde émergente est polarisée elliptiquement. Les axes de cette ellipse sont confondus avec les lignes neutres de la lame quart d'onde.
- Dans le cas particulier où la direction de polarisation de l'onde incidente est celle de la bissectrice des directions formées par les lignes neutres de la lame, la vibration émergente est polarisée circulairement.
- Lorsqu'une onde polarisée elliptiquement éclaire une lame quart d'onde et que les axes de l'ellipse se confondent avec les lignes neutres de la lame quart d'onde, la vibration émergente est polarisée rectilignement.

✓ Production et analyse d'une lumière totalement polarisée

Une lame quart d'onde et un polariseur suffisent pour produire des ondes de polarisation rectiligne, circulaire ou elliptique.

Il suffit d'un analyseur pour déterminer si une onde est polarisée rectilignement.

Pour analyser une onde de polarisation elliptique ou circulaire, il faut utiliser une lame quart d'onde afin de transformer cette onde en une vibration rectiligne dont l'extinction par l'analyseur renseigne sur les propriétés de l'onde incidente.

Exercices

Niveau 1

Ex. 1 États de polarisation

On définit l'état de polarisation d'une onde électromagnétique à partir de l'évolution temporelle du champ électrique \vec{E} en un point M donné.

1) Donner l'expression générale du champ électrique d'une onde plane, progressive, harmonique, polarisée rectilignement dans une direction quelconque et qui se propage dans le sens des z croissants, dans un milieu assimilé au vide.

2) a) Donner l'expression générale du champ électrique d'une onde plane, progressive, harmonique, polarisée elliptiquement, qui se propage dans le sens des z croissants.

b) Déterminer le sens de polarisation (gauche ou droite) de l'onde dont le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E}(M, t) = E_{0x} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x + E_{0y} \cos\left(\omega t - kz + \frac{\pi}{6}\right) \vec{e}_y$$

On expliquera soigneusement le raisonnement en supposant E_{0x} et E_{0y} réels positifs.

c) À quelle(s) condition(s) une onde est-elle polarisée circulairement ?

3) Expliquer pourquoi la lumière émise par une source classique n'est pas polarisée.

Écrit, Centrale-Supélec, PC, 2003.

Ex. 2 Bases d'états de polarisation

1) Montrer que toute onde plane progressive harmonique polarisée elliptiquement peut se décomposer comme somme de deux ondes polarisées rectilignement. Cette décomposition est-elle unique ?

2) Montrer que toute onde plane progressive harmonique polarisée rectilignement peut se décomposer comme somme de deux ondes polarisées circulairement et dont on précisera les sens de rotation dans le plan d'onde.

Ex. 3 Variations relatives d'intensité lumineuse

1) Une onde plane polarisée rectilignement arrive sous incidence normale sur un polariseur dont l'axe est incliné de $\alpha = 15^\circ$ sur la direction de polarisation.

a) On augmente α de 10° . Calculer la variation relative d'intensité.

b) Même question si l'angle initial α vaut 60° . Conclure.

2) Un faisceau de lumière non polarisée passe à travers deux filtres polaroïds, ce qui réduit son intensité de $\Delta\%$. Quel est l'angle entre les deux axes des polaroïds ? Application numérique : $\Delta = 60\%$.

Ex. 4 lame demi-onde

On considère une onde polarisée rectilignement en incidence normale sur une lame demi-onde. Le champ électrique incident fait un angle α avec Oz et appartient au plan d'onde yOz .

Les lignes neutres de la lame sont dirigées selon Oy et Oz . L'axe lent n'est pas précisé et est à indiquer au cours de l'exercice.

Décrire la polarisation de l'onde transmise en fonction de α .

Oral, CGB PC, 1998

Ex. 5 Loi de Malus

1) Décrire une expérience permettant d'obtenir une onde lumineuse polarisée rectilignement et de l'analyser.

2) Le polariseur rectiligne utilisé dans cette question n'est pas idéal (par exemple, le polaroïd utilisé en travaux pratiques). T_1 désigne le coefficient de transmission en énergie selon la direction de transmission privilégiée du polariseur et T_2 le coefficient de transmission analogue selon la direction perpendiculaire. On supposera $T_2 < T_1$.

Une onde électromagnétique plane, polarisée rectilignement, arrive normalement sur la face d'entrée d'un polaroïd selon l'axe Ox ; le vecteur champ électrique de l'onde fait un angle θ avec la direction de transmission privilégiée du polaroïd, supposée parallèle à l'axe Ox .

Calculer le coefficient de transmission T en énergie de l'onde à travers ce polaroïd en fonction de T_1 , T_2 et de θ . Commenter en envisageant le cas particulier du polariseur idéal.

Écrit, Centrale - Supélec, PC, 2003

Niveau 2

Ex. 6 Représentation de Jones

L'état de polarisation d'une onde plane, progressive, harmonique, se propageant dans le sens des z croissants, est entièrement décrit par la donnée des deux composantes du champ électrique dans le plan (xOy) . Cet état peut être représenté par un vecteur à deux dimensions, appelé « vecteur de Jones » (inventé en 1941 par

le physicien américain Robert Clark Jones), dont les composantes sont proportionnelles aux amplitudes complexes des composantes du champ électrique. Le vecteur de Jones \vec{J} associé au champ électrique :

$\vec{E} = E_{0x} \exp(-i(\omega t - \varphi_x)) \vec{e}_x + E_{0y} \exp(-i(\omega t - \varphi_y)) \vec{e}_y$
est donc :

$$\vec{J} = \begin{bmatrix} E_{0x} \exp(i\varphi_x) \\ E_{0y} \exp(i\varphi_y) \end{bmatrix}.$$

On appelle « intensité lumineuse » I la valeur moyenne de la puissance surfacique de cette onde.

1) Quelle est la signification physique de :

$$J^2 = \|\vec{J}\|^2 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2?$$

2) On associe à \vec{J} le vecteur de Jones normé :

$$\hat{J} = \frac{1}{\sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}} \begin{bmatrix} E_{0x} \exp(i\varphi_x) \\ E_{0y} \exp(i\varphi_y) \end{bmatrix}.$$

a) Quel état de polarisation représentent les vecteurs suivants :

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{Y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \hat{G} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \text{ et } \hat{D} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}?$$

Justifier soigneusement les réponses.

b) Comment s'écrit le vecteur de Jones normé d'une onde polarisée elliptiquement droite dont les axes sont Ox et Oy ?

3) On considère l'état de polarisation défini par le vecteur de Jones :

$$\hat{J}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{G} - \hat{D}).$$

Quelle est sa polarisation? Que peut-on en conclure?

4) Montrer que toute onde plane progressive harmonique polarisée peut s'interpréter à la fois :

– comme la superposition de deux ondes planes progressives harmoniques polarisées rectilignement suivant deux directions orthogonales;

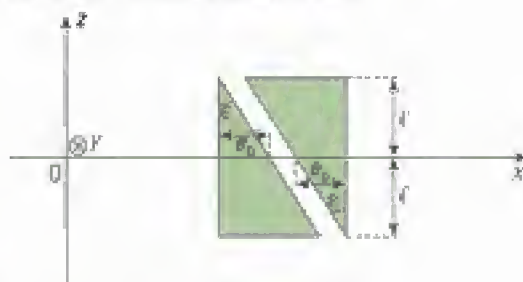
– comme la superposition de deux ondes planes progressives harmoniques polarisées circulairement, l'une droite, l'autre gauche.

D'après Écrit, Centrale-Supélec, PC, 2003

Niveau 3

Ex. 7 Compensateur de Babinet

On considère le dispositif suivant :



Deux prismes de quartz de petit angle ϵ sont disposés comme ci-dessus. Ils sont tous deux taillés de façon à ce que (Oy) soit l'axe rapide de l'un d'eux et l'axe lent de l'autre. L'appareil est placé entre polariseur et analyseur croisés et orientés à 45° des lignes neutres des lames prismatiques. On note e_0 l'épaisseur des lames à $z = 0$.

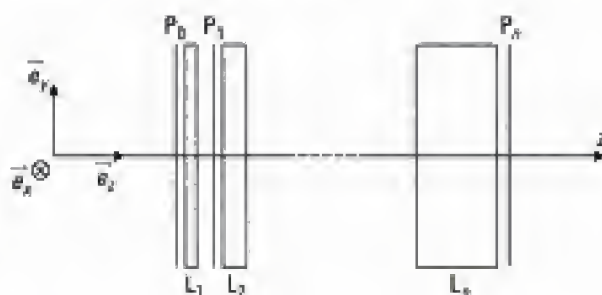
1) On éclaire l'ensemble sous incidence normale selon (Ox) , en lumière parallèle issue d'une lampe à vapeur de sodium de longueur d'onde moyenne 589,3 nm. Décrire le phénomène observé à travers l'analyseur et étudier les variations de l'intensité transmise en fonction de la côte z .

A.N. : $\epsilon = 3 \cdot 10^{-3}$ radian, $n_1 = 1,544$ et $n_2 = 1,553$.

2) Comment le phénomène se modifie-t-il si l'on déplace un des deux prismes parallèlement à Ox ?

Ex. 8 Filtre monochromatique de Lyot

Un filtre optique de Lyot est composé de $n + 1$ polaroïds et n lames biréfringentes de lignes neutres (Ox) et (Oy) d'indices respectifs n_x et n_y supposés indépendants de la longueur d'onde :



Les axes des polaroïds sont tous parallèles et à 45° de l'axe (Ox) . La $k^{\text{ème}}$ lame L_k a pour épaisseur $2^{k-1} \cdot e$.

Le dispositif est éclairé sous incidence normale en lumière naturelle monochromatique plane, de longueur d'onde dans le vide λ_0 . On note I_0 l'intensité transmise par P_0 .

1) Exprimer le déphasage ϕ_0 introduit par L_1 en fonction de λ_0 , e et $\Delta n = |n_x - n_y|$.

2) Exprimer l'intensité lumineuse en sortie du montage en fonction de I_0 et des paramètres du dispositif. Préciser la fonction de transfert T associée à l'ensemble $\{L_1, P_1, \dots, P_n\}$.

3) Exprimer l'intensité maximale en sortie du montage.

4) À l'aide de l'ordinateur, représenter $I_k(\phi)$ (logiciel Maple).

5) On donne $e = 0,25$ mm et $n_y - n_x = 10^{-2}$. Calculer les longueurs d'ondes des radiations visibles transmises.

Oral, Centrale-Supélec, MP, 2002

Indications

Ex. 6

1) La définition de l'intensité lumineuse choisie par l'énoncé est celle donnée pour l'éclairement au chapitre 1.

2), 3) et 4) On retrouve les conclusions données à l'exercice 2.

Ex. 7

1) Il s'agit d'un phénomène d'interférences. Pour le mettre en évidence, il faut étudier les composantes du champ électrique à la traversée de chaque élément du montage optique, en raisonnant à une cote z donnée. Déterminer en particulier le déphasage correspondant à la traversée des deux prismes puis exprimer le champ total à la sortie de l'analyseur.

Ex. 8

2) Exprimer le champ électrique à la sortie des différents éléments optiques depuis P_0 jusqu'à P_1 . Faire alors apparaître une relation de récurrence qui permet d'en déduire le champ transmis en sortie de P_1 .

Hidden page

2) L'expression du champ électrique associé à une onde plane progressive harmonique polarisée rectilignement peut s'écrire, par exemple, sous la forme :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_m \cdot \cos(\omega t - kz) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E_m}{2} \cdot \cos(\omega t - kz) \\ \frac{E_m}{2} \cdot \sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{E_m}{2} \cdot \cos(\omega t - kz) \\ -\frac{E_m}{2} \cdot \sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le premier terme est le champ associé à une onde polarisée circulaire gauche et le second à une onde polarisée circulaire droite. Le résultat se généralise à toute autre écriture définissant une onde plane progressive harmonique polarisée rectilignement.

Exercice 3

1) Il faut utiliser dans cet exercice la loi de Malus : $I = I_0 \cdot \cos^2 \alpha$, où α désigne ici l'angle entre la direction du champ incident et la direction du polariseur.

$$a) \Delta I_1 = \frac{I(\alpha = 25^\circ) - I(\alpha = 15^\circ)}{I(\alpha = 15^\circ)} = \frac{\cos^2 25^\circ - \cos^2 15^\circ}{\cos^2 15^\circ} = -0,119,$$

soit une **diminution relative de 11,9 %**.

$$b) \Delta I_2 = \frac{I(\alpha = 70^\circ) - I(\alpha = 60^\circ)}{I(\alpha = 60^\circ)} = \frac{\cos^2 70^\circ - \cos^2 60^\circ}{\cos^2 60^\circ} = -0,532,$$

soit une **diminution relative de 53,2 %**.

On conclut que **pour une même rotation d'angle donnée, l'intensité lumineuse transmise varie plus ou moins selon la valeur initiale de l'angle α** .

2) Décomposons la transmission successive par les deux polariseurs en notant I_0 l'intensité de l'onde incidente :

– à la sortie du premier polariseur, l'intensité lumineuse est réduite de moitié (cf. application 1) :

$$I_{s_1} = \frac{I_0}{2} ;$$

– à la sortie du deuxième polariseur, incliné de l'angle α sur le premier, l'intensité lumineuse est :

$$I_{s_2} = I_{s_1} \cdot \cos^2 \alpha = \frac{I_0}{2} \cdot \cos^2 \alpha.$$

La diminution relative Δ s'écrit donc :

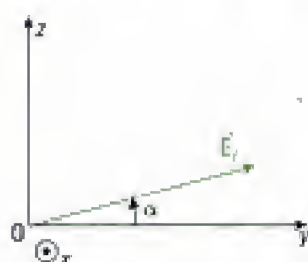
$$\Delta = \frac{I_{s_2} - I_0}{I_0} = \frac{1}{2} \cdot \cos^2 \alpha - 1$$

soit :

$$\alpha = \text{Arccos}(\sqrt{2(1 - \Delta)}) \quad \text{A.N. : } \alpha = 26,5^\circ$$

Exercice 4

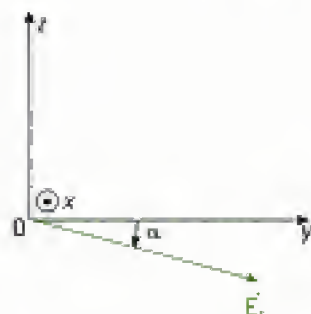
On représente le champ électrique incident \vec{E}_i , d'amplitude E_0 , dans le plan d'onde yOz :



$$\vec{E}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \cdot \cos \alpha \cdot e^{j\omega t} \\ E_0 \cdot \sin \alpha \cdot e^{j\omega t} \end{pmatrix}$$

Nous supposons, par exemple, que l'axe lent de la lame demi-onde est confondu avec l'axe Oz. Ainsi, le champ électrique transmis \vec{E}_t s'écrit en changeant l'origine des temps :

$$\vec{E}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \cdot \cos \alpha \cdot e^{j\omega t} \\ E_0 \cdot \sin \alpha \cdot e^{j(\omega t - \pi)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \cdot \cos \alpha \cdot e^{j\omega t} \\ -E_0 \cdot \sin \alpha \cdot e^{j\omega t} \end{pmatrix}$$



Si nous avons choisi Oz comme axe rapide, nous aurions trouvé \vec{E}_t symétrique de \vec{E}_i par rapport à Oz au lieu de Oy. L'onde transmise en sortie de la lame est donc polarisée rectilignement, **symétrique de la direction de polarisation de l'onde incidente par rapport à une ligne neutre de la lame.**

Exercice 5

1) • Production de la lumière polarisée

La source lumineuse retenue éclaire un polariseur sous incidence normale (par exemple, un polaroïd) qui transmet à sa sortie une onde polarisée rectilignement suivant la direction de polarisation de ce polariseur.

• Analyse de la lumière polarisée

On observe l'intensité du faisceau polarisé à l'aide d'un analyseur (un second polaroïd). En faisant tourner l'analyseur dans le plan d'onde, l'intensité est maximale si l'axe de l'analyseur est parallèle à l'axe du polariseur et nulle si les axes du polariseur et de l'analyseur sont perpendiculaires (montage «polariseur-analyseur croisés»).

2) • Coefficient de transmission T en énergie du polaroïd

Les composantes du champ incident sur le polaroïd s'écrivent à l'instant t et dans le plan $z = z_0$ du polaroïd :

$$E_x = E_0 \cos \theta \cos(\omega t - kz_0) \quad \text{et} \quad E_y = E_0 \sin \theta \cos(\omega t - kz_0)$$

d'où on déduit l'expression des intensités arrivant sur les axes du polariseur :

$$I_x = E_0^2 \cos^2 \theta \quad \text{et} \quad I_y = E_0^2 \sin^2 \theta.$$

L'intensité lumineuse à l'entrée du polaroïd s'écrit donc $I_e = E_0^2$ tandis qu'en sortie elle vaut :

$$I_s = T_1 E_0^2 \cos^2 \theta + T_2 E_0^2 \sin^2 \theta.$$

On en déduit le coefficient de transmission en énergie $T = \frac{I_s}{I_e}$:

$$T = T_1 \cos^2 \theta + T_2 \sin^2 \theta.$$

• Cas particulier du polariseur idéal

Si le polariseur est idéal, $T_1 = 1$ et $T_2 = 0$. On retrouve la loi de Malus :

$$T = \cos^2 \theta.$$

Exercice 6

1) La définition de l'intensité lumineuse I ici imposée par l'énoncé est celle de l'éclairement tel qu'il a été défini au chapitre 1, soit :

$$I = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2} = \frac{\epsilon_0 c (E_{0x}^2 + E_{0y}^2)}{2}, \quad \text{avec : } E_0 \text{ amplitude du champ.}$$

Le nombre $J^2 \equiv E_{0x}^2 + E_{0y}^2$ est donc égal, à un facteur près, à l'intensité de l'onde ainsi définie : **J^2 représente l'intensité de l'onde associée au vecteur de Jones.**

Hidden page

• **Superposition de deux ondes planes progressives harmoniques qui sont polarisées circulairement**

Nous avons montré que $\hat{\mathbf{J}}$ peut se décomposer en fonction de $\hat{\mathbf{X}}$ et de $\hat{\mathbf{Y}}$. De même, on peut décomposer $\hat{\mathbf{X}}$ et $\hat{\mathbf{Y}}$ en fonction de $\hat{\mathbf{G}}$ et de $\hat{\mathbf{D}}$:

$$\hat{\mathbf{X}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{G}} + \hat{\mathbf{D}}) \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{Y}} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{D}} - \hat{\mathbf{G}}).$$

Ainsi :

$$E_{0x} \exp(i\varphi_x) \hat{\mathbf{X}} = \frac{E_{0x} \exp(i\varphi_x)}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{G}} + \hat{\mathbf{D}}) \quad \text{et} \quad E_{0y} \exp(i\varphi_y) \hat{\mathbf{Y}} = \frac{iE_{0y} \exp(i\varphi_y)}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{D}} - \hat{\mathbf{G}}).$$

D'où :

$$\hat{\mathbf{J}} = \frac{1}{\sqrt{2}(E_{0x}^2 + E_{0y}^2)} \{ (E_{0x} \exp(i\varphi_x) - iE_{0y} \exp(i\varphi_y)) \hat{\mathbf{G}} + (E_{0x} \exp(i\varphi_x) + iE_{0y} \exp(i\varphi_y)) \hat{\mathbf{D}} \}.$$

Quel que soit son état de polarisation, une onde plane progressive harmonique peut donc se décomposer en une onde circulaire gauche et une onde circulaire droite.

Commentaire : on retrouve les résultats établis en exercice 2 mais en utilisant ici la représentation de Jones.

Exercice 7

1) • Description du phénomène observé à travers l'analyseur

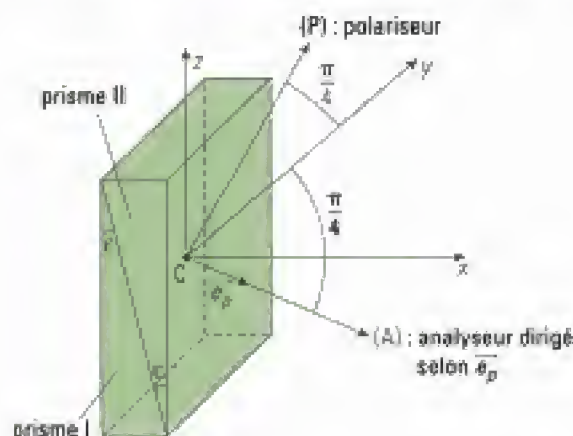


Figure 1

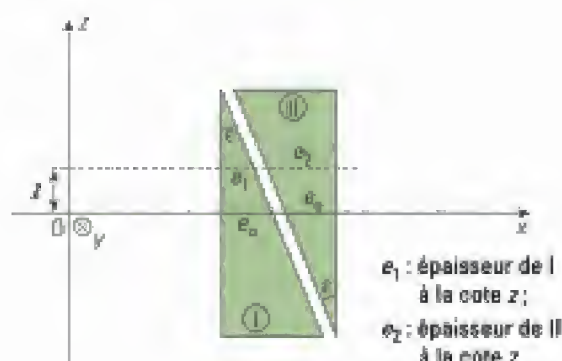


Figure 2

Les composantes (E_x, E_y) du champ électrique sont déphasées entre elles, bien que traversant la même épaisseur de quartz $e_1 + e_2$ à la cote z , car chaque prisme retarde une seule des composantes. Or le retard de phase étant proportionnel à l'épaisseur traversée (e_1 pour I mais e_2 pour II), les composantes (E'_x, E'_y) du champ à la sortie du dispositif ne sont plus en phase (sauf à la cote $z = 0$ car alors $e_1 = e_2 = e_0$).

Ensuite, l'onde traverse un analyseur (A) situé à 45° des axes (Ox) et (Oy) . Il permet de produire le champ :

$$\vec{E}_s = \left(\cos \frac{\pi}{4} \cdot E'_y - \cos \frac{\pi}{4} \cdot E'_x \right) \cdot \vec{e}_s,$$

c'est-à-dire la somme de deux ondes de même direction de polarisation, cohérentes (tant que la différence de marche introduite n'est pas supérieure à la longueur de cohérence de la source employée) et synchrones. L'analyseur permet ainsi de produire des **interférences entre les deux composantes du champ E'_y et E'_x** .

• Variations de l'intensité lumineuse



Il n'est pas avantageux d'utiliser ici la notation complexe pour écrire les composantes du champ électrique. En effet, l'intensité lumineuse I sera déterminée plus simplement par la relation : $I = 2 \langle \vec{E}^2 \rangle_t$.

Écrivons les composantes du champ incident \vec{E}_i sur le dispositif polarisé rectilignement par le polariseur (P). Par exemple :

$$\vec{E}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \cdot \cos(\omega t) = E_y \\ E_0 \cdot \cos(\omega t) = E_x \end{pmatrix} \quad (\vec{E}_i \text{ étant dirigé selon la bissectrice de } \widehat{yOx}).$$

En notant $\Delta\phi$ le déphasage de E_z par rapport à E_y , on a en sortie des deux prismes le champ transmis :

$$\vec{E}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ E'_y = E_0 \cdot \cos(\omega t) \\ E'_z = E_0 \cdot \cos(\omega t - \Delta\phi) \end{pmatrix}$$

Il faut maintenant exprimer le déphasage $\Delta\phi$ à la cote z , ce qui nécessite de faire une hypothèse sur la position de l'axe rapide de chaque lame (le résultat final n'en dépendant pas néanmoins). Supposons par exemple que l'axe rapide du prisme I soit confondu avec (Oy). Les retards de phase dus à chaque lame s'écrivent alors :

– à la traversée du prisme I : $\Delta\phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot (n_2 - n_1) \cdot e_1 \quad (n_2 > n_1)$

– à la traversée du prisme II : $\Delta\phi_2 = - \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot (n_2 - n_1) \cdot e_2$ (le signe négatif de $\Delta\phi_2$ est dû à ce que l'axe lent du prisme II est (Oy), donc le « retard » de phase $\Delta\phi_2$ doit ici traduire une avance de phase...).

Le déphasage $\Delta\phi$ est donc :

$$\Delta\phi = \Delta\phi_1 + \Delta\phi_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot (n_2 - n_1) \cdot (e_1 - e_2).$$

La figure 2 montre qu'à la cote z , on a :

$$\begin{aligned} e_1 &= e_0 - z \cdot \tan \varepsilon = e_0 - z \cdot \varepsilon \quad (\text{car ici } \varepsilon \ll 1) \\ e_2 &= e_0 + z \cdot \tan \varepsilon = e_0 + z \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\Delta\phi = - \frac{4\pi}{\lambda_0} \cdot (n_2 - n_1) \cdot z \cdot \varepsilon.$$

Enfin, en sortie de l'analyseur (A) le champ \vec{E}_s s'écrit :

$$\vec{E}_s = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \vec{E}_0 \cdot [\cos(\omega t) - \cos(\omega t - \Delta\phi)] \cdot \vec{e}_p$$

d'où : $I = 2 \langle \vec{E}_s^2 \rangle_t = E_0^2 \cdot [\langle \cos^2(\omega t) \rangle_t - 2 \langle \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t - \Delta\phi) \rangle_t + \langle \cos^2(\omega t - \Delta\phi) \rangle_t]$

$$I = E_0^2 \cdot (1 - \cos \Delta\phi) = E_0^2 \cdot \left[1 - \cos \left(\frac{4\pi}{\lambda_0} \cdot (n_2 - n_1) \cdot \varepsilon \cdot z \right) \right]$$

soit :

$$I(z) = I_0 \cdot \left[1 - \cos \left(\frac{4\pi}{\lambda_0} \cdot (n_2 - n_1) \cdot \varepsilon \cdot z \right) \right] \quad \text{avec } I_0 = E_0^2.$$

On observe donc sur un écran (moyennant un montage optique que nous ne préciserons pas ici), placé après l'analyseur perpendiculairement à l'axe optique, des franges rectilignes parallèles à l'axe (Oy). La figure d'interférences est symétrique par rapport à la ligne de cote $z = 0$ puisque $I(-z) = I(z)$. La frange centrale est noire car $I(z = 0) = 0$. L'interfrange i s'exprime ici selon :

$$i = \frac{\lambda_0}{2 \cdot (n_2 - n_1) \cdot \varepsilon}.$$

A.N. : $n_2 - n_1 = 9 \cdot 10^{-3}$ et $i = 10,91 \text{ mm}$.

2) Envisageons par exemple un déplacement d du prisme II vers le haut :

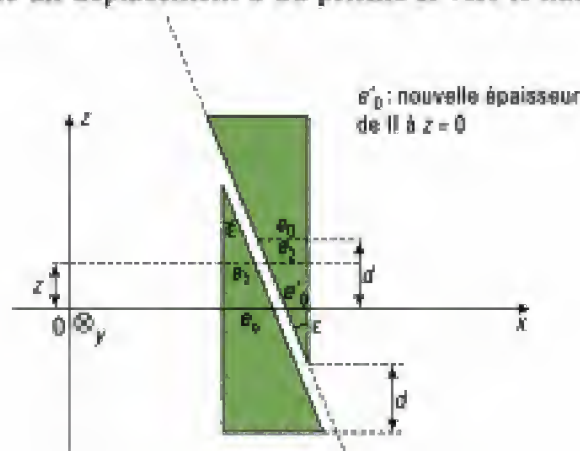


Figure 3

On a donc toujours :

$$e_1 = e_0 - z \cdot \tan \epsilon, \text{ mais désormais : } e_2 = e_0 - (d - z) \cdot \tan \epsilon.$$

Par rapport à la situation précédemment étudiée, on a donc une différence de marche δ qui modifie l'expression du déphasage $\Delta\phi$ qui s'écrit désormais :

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot (n_2 - n_1) \cdot (e_1 - e_2) = - \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot (n_2 - n_1) \cdot (2z - d) \epsilon \quad (\epsilon \ll 1).$$

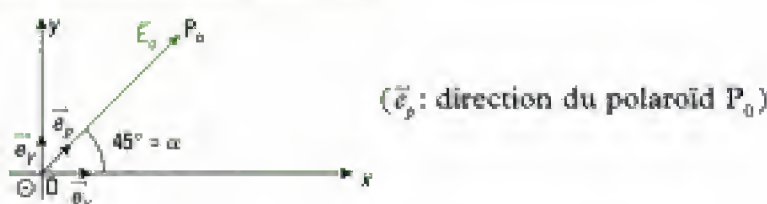
La figure d'interférences est donc simplement traduite dans le plan de l'écran de $z = \frac{d}{2}$, la frange centrale étant située à la cote $z_c = \frac{d}{2}$.

Commentaire : Si les paramètres d et ϵ sont connus, on peut ajouter dans le montage précédent une lame biréfringente éclairée sous incidence normale, d'épaisseur e et telle que ses lignes neutres soient confondues avec (Oy) et (Oz) . On peut alors observer un déplacement de la figure d'interférences (en lumière blanche) et ramener la frange centrale au centre ($z = 0$) grâce au déplacement d . On en déduit la biréfringence Δn de la lame inconnue :

$$e \cdot \Delta n = d \cdot |n_z - n_y| \cdot \epsilon.$$

Exercice 8

1)



(\vec{e}_p : direction du polaroid P_0)

À l'entrée de L_1 ($z = 0$) :

$$\vec{E}_0 = \begin{cases} E_0 \cdot \cos \alpha \cdot e^{i\omega t} = \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \cdot e^{i\omega t} \\ E_0 \cdot \sin \alpha \cdot e^{i\omega t} = \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \cdot e^{i\omega t} \\ 0 \end{cases}$$

À la sortie de L_1 :

$$\vec{E}_1 = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \cdot e^{i(\omega t - k_x \cdot e)} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \cdot e^{i(\omega t - k_y \cdot e)} \\ 0 \end{cases}$$

Hidden page

Pour exprimer l'intensité lumineuse I , explicitons \vec{E}'_x en fonction de \vec{e}_y , avec $\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e}_x + \vec{e}_y) = \vec{e}_p$:

$$I = \vec{E}'_x \cdot \vec{E}'_x^* = \left(\frac{E_0}{2^n} \right)^2 \cdot \left[\frac{\sin\left(2^n \frac{\phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)} \right]^2 = E_0^2 \cdot \left[\frac{\sin\left(2^n \frac{\phi}{2}\right)}{2^n \cdot \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)} \right]^2$$

Avec $I_0 = E_0^2$, il vient après le $n^{\text{ème}}$ polaroïd:

$$I = I_0 \cdot \left[\frac{\sin\left(2^n \cdot \frac{\phi}{2}\right)}{2^n \cdot \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)} \right]^2$$

et

$$T = \frac{I}{I_0} = \left[\frac{\sin\left(2^n \cdot \frac{\phi}{2}\right)}{2^n \cdot \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)} \right]^2$$

Commentaire: au facteur 2^{2n} près, l'intensité a même expression que celle qui serait diffractée par un réseau comprenant 2^n traits.

3) I est maximale lorsque:

$$\phi = 2m\pi, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (\text{identique au cas du réseau}).$$

Ainsi, au voisinage de $\phi = 0$:

$$I_{\max} \approx I_0 \cdot \left[\frac{2^n \cdot \frac{\phi}{2}}{2^n \cdot \frac{\phi}{2}} \right]^2 = I_0$$

$$4) \frac{I_4(\phi)}{I_0} = \left[\frac{\sin(8\phi)}{16 \cdot \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)} \right]^2 = \frac{1}{256} \cdot \left(\frac{\sin(8\phi)}{\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)} \right)^2$$

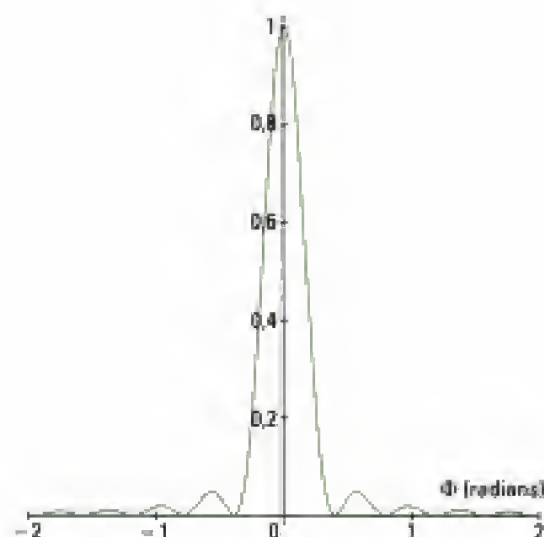
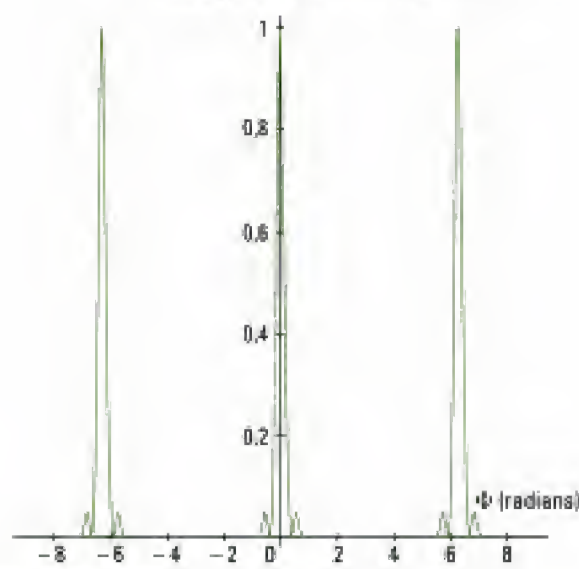
D'où la programmation suivante sous Maple:

STUDENT > restart;with(plots):

I4:=1/256*(sin(8*Phi)/sin(Phi/2))^2;

plot(I4,Phi=-3*Pi...3*Pi);

STUDENT > plot(I4,Phi=-2..2);



Commentaire : le dispositif optique ne transmet correctement que les radiations pour lesquelles on a $\phi = 2m\pi$. Le système se comporte ainsi comme un monochromateur, c'est-à-dire un filtre optique sélectif.

5) L'étude précédente montre que seules les radiations qui correspondent à un maximum principal sont transmises. Ainsi :

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot (n_y - n_x) \cdot e = 2m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}^*$$

soit :
$$m = \frac{(n_y - n_x)}{\lambda_0} \cdot e \quad \text{avec ici} \quad 0,4 \, \mu\text{m} \leq \lambda_0 \leq 0,8 \, \mu\text{m}.$$

Numériquement, il vient :

$$3,125 \leq m \leq 6,25.$$

Les valeurs entières de m sont donc $\{4, 5, 6\}$ et conduisent à :

$$\lambda_{01} = (n_y - n_x) \cdot \frac{e}{4} = 0,62 \, \mu\text{m}$$

$$\lambda_{02} = (n_y - n_x) \cdot \frac{e}{5} = 0,50 \, \mu\text{m}$$

$$\lambda_{03} = (n_y - n_x) \cdot \frac{e}{6} = 0,42 \, \mu\text{m}.$$

Index

A

Airy (tache d'), 245
Anneaux, 91, 188

- à l'infini, 188, 202
- d'égale inclinaison, 209
- de Newton, 210

Apodisation, 265
Approximation des grandes distances, 45
Axe lent/rapide, 295

B

Babinet, 248, 306
Biréfringence, 294, 314
Blanc d'ordre supérieur, 151, 201
Brewster, 292
Brouillage (critère de), 101, 146

C

Cannelures, 151
Champ d'interférences, 57, 59
Chemin optique, 21

- différence de, 21, 46

Cohérence spatiale, 98, 187

- degré de, 100

Cohérence temporelle, 46, 102, 143

- degré de, 148
- durée, 17, 289
- longueur, 17, 150

Compensatrice, 196
Contact optique, 189
Contraste, 52, 100, 145

- inversé, 149

Couche anti-reflet, 206

D

Densité spectrale, 17, 147, 229
Diaphragme, 247
Différence de marche géométrique, 46
Diffraction à l'infini, 233

- fente de largeur variable, 251
- fentes de Young, 249
- maximum principal, 241
- pupille circulaire, 245
- pupille fente, 244
- pupille rectangulaire, 240

Distribution spectrale, 17
Division

- front d'onde, 48, 169, 182
- amplitude, 48, 133, 182

E

Éclairement, 14

- maximal/minimal, 51
- uniforme, 101

Émission stimulée, 18
Excédent fractionnaire, 219

F

Facteur de transmission, 262
Filtres

- interférentiels, 222
- dichroïques, 290

Formation des images, 246
Fringes

- achromatiques, 157, 170
- annulaires, 198
- déplacement, 194
- hyperboliques, 136
- localisation (source ponctuelle), 159
- rectilignes, 85, 138, 194

Fraunhofer, 238, 252, 265

G

Goniomètre, 272

H

Holographie, 30
Huygens-Fresnel (principe de), 236
Hyperboloïdes, 88

I

Indice de réfraction, 12, 202
Intensité lumineuse, 14
Interférences, 42

- à lasers synchrones, 47
- à deux ondes totalement cohérentes, 84
- contraste (ou visibilité), 52
- constructives/destructives, 51
- disparition de la figure, 149
- doublet spectral, 144, 200
- franges, 52
- intensité lumineuse, 50
- localisées à deux ondes avec un diviseur d'amplitude, 205
- lumière blanche, 150, 157
- ordre, 50
- paradoxe, 43
- profil spectral rectangulaire, 147

Interférogramme, 146, 211
Interféromètre, 47

- de Michelson, (voir Michelson)
- de Pérot-Fabry, 203, 210

Interfrange, 53, 61

J

Jones (représentation de), 305

L

Lame

- à face parallèles, 141, 183
- à retard, 294
- d'air, 206

- d'air virtuelle, 137
- demi-onde, 295, 305
- quart-d'onde, 296
- semi-transparente, 48

Largeur spectrale, 17, 147

Laser, 15

Limite de résolution, 246

Localisation, 182

Lumière

- cohérente, 18
- naturelle, 289
- polarisée (analyse), 298
- polarisée (production), 290

Lyot (filtre de), 306

M

Mainman, 15

Malus (théorème de), 23

(loi de), 292, 305

Michelson (interféromètre), 132, 208

- champ d'interférences, 139
- (source ponctuelle), 162
- (source étendue), 183, 209
- montage en coin d'air, 137, 190
- montage en lames d'air à faces parallèles, 137, 184
- procédure de réglage, 195

Minimum de déviation, 256

Miroirs de Fresnel, 92, 108, 110, 160

Miroir de Lloyd, 64, 157

Modèle de la lumière

- scalaire, 49
- vectoriel, 286

Monochromateur à réseau, 267

N

Nombre d'onde, 144

O

Objet de phase, 31, 266

Ondes, 6

- cohérentes, 44
- notation complexe, 10

Ondelette, 235

P

Pas du réseau, 272

Phase, 8

- à l'origine, 17
- différence de, 19
- différence de retard de, 20
- discontinuité, 20
- retard de, 7, 46, 295

Photomultiplicateur, 19

Photodiode, 19, 144

Photopile, 19

Plan de vibration, 288

Pohl (franges de), 64

Polarisation,

- circulaire, 288
- diffusion (par), 293
- elliptique, 287
- état de, 286, 305

- ligne neutre, 294
- méthode d'analyse, 301
- partielle, 289
- rectiligne, 10, 286
- réflexion (par), 292
- totale, 289

Polariseur, 290

Polaroïd, 290

Pouvoir dispersif, 257

Principe de superposition, 43

Puissance rayonnée, 13

R

Rayleigh (critères de), 258

Réseau, 265

- à échelottes, 267
- « blazé », 282
- sinusoïdal, 266

Réseau de diffraction, 233

- ordre d'interférences, 253
- pouvoir dispersif, 257
- recouvrement des ordres, 258
- relation fondamentale, 253

Retour inverse de la lumière, 22

S

Séparatrice, 133, 183

Source

- cohérente, 47
- étendue, 182
- primaire, 48
- secondaire, 47, 235
- synchrone, 48

Spectre d'émission, 15

Spectrométrie interférentielle, 211

Spectrophotomètre, 268

Spectroscope, 273

- prisme, 201

Stigmatisme rigoureux, 30

Superposition (principe de), 43, 44

Surface

- de localisation, 185
- d'égale intensité, 52
- d'onde, 7
- équiphase, 8

T

Train (ou paquet) d'ondes, 16, 289

V

Visibilité des franges (critère de), 102

Volume d'interférences, 67

W

Wien (loi de), 15

Y

Young

- expérience de, 42, 237
- fentes (ou trous) de, 95, 108, 109, 160, 249
- principe de, 42

Bréal, l'éditeur des prépas

En français

► L'épreuve littéraire



En un seul volume, une préparation complète et efficace à l'épreuve littéraire des concours des Grandes Écoles scientifiques, sur le thème au programme : résumé et analyse des œuvres au programme, étude synthétique du thème, méthodologie des épreuves, traitement d'images et d'autres textes en lien avec le thème.



► 20 dissertations analysées et corrigées

Vingt dissertations autour du thème au programme, complétées par une méthodologie générale illustrée. Chaque sujet comprend une analyse de l'énoncé, un plan détaillé, ainsi qu'un corrigé rédigé et de nombreux commentaires.



► Connaissance d'une œuvre



Les repères essentiels sur l'œuvre et son auteur, une analyse détaillée du texte et des principaux thèmes, des compléments utiles et des prolongements vers d'autres œuvres.

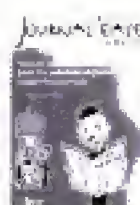
► La philothèque



Cette collection permet de comprendre les enjeux philosophiques de l'œuvre étudiée et les concepts qu'elle véhicule. Chaque ouvrage comprend des éléments de lecture et d'analyse de l'œuvre dans son ensemble, le texte intégral d'une partie de l'œuvre et différents outils (vocabulaire, notions, etc.).

En langues

► Journal'ease Vocabulaire, Journal'ease Exercices



Les 1300 mots nécessaires pour lire et comprendre la presse anglo-saxonne, ainsi que des exercices variés pour s'entraîner à utiliser le bon mot au bon moment, à l'oral comme à l'écrit. Des outils de travail efficaces pour préparer les concours et les examens.

Existe aussi en allemand (*Journ'allemand Vocabulaire et exercices*), en espagnol (*Journal'isimo Vocabulaire et exercices*) et en italien (*Journal'italien*).



► Fort en thème - Fort en version

Des exercices de thème et de version, de difficulté progressive, pour s'entraîner à ces deux techniques de la traduction.

Titres disponibles en anglais, allemand et espagnol.

Retrouvez toutes les informations nécessaires sur ces titres et d'autres ouvrages pour les prépas sur notre site : www.editions-breial.fr

Hidden page



Titres disponibles en deuxième année dans les filières MP, PC, PSI et PT.

En Mathématiques

Analyse MP
Analyse PC
Analyse PSI
Algèbre et géométrie MP
Algèbre et géométrie PC
Algèbre et géométrie PSI

En Chimie

Chimie MP-PT
Chimie organique PC
Thermodynamique-Matériaux PC
Chimie PSI

En Physique

Optique MP-PC-PSI-PT
Mécanique MP-PC
Électromagnétisme MP
Électromagnétisme PC-PSI
Physique des ondes PC-PSI
Électronique MP
Électronique PSI
Électrotechnique PSI
Thermodynamique MP
Thermodynamique PC-PSI
Mécanique des fluides PC-PSI

Livres d'exercices

Mathématiques MP
Mathématiques PC-PSI
Physique MP
Physique PC
Physique PT
Physique PSI

LES NOUVEAUX Précis BRÉAL

Une collection tenant compte de vos besoins et de vos contraintes, conçue pour vous aider tout au long de l'année à préparer efficacement les concours.

- **Un cours complet et très clair**, illustré de nombreux exemples, pour comprendre et assimiler.
- **Des pages de méthode**, facilement mémorisables, pour acquérir les savoir-faire et les réflexes nécessaires.
- **De nombreux exercices corrigés**, variés et progressifs, pour s'entraîner régulièrement.

Les Nouveaux Précis Bréal sont la collection de référence pour réussir sa prépa et intégrer une grande école d'ingénieurs.

BRÉAL, L'ÉDITEUR DES PRÉPAS

Réf. : 309.0357
ISBN : 2 7495 0395 7
www.editions-breál.fr

